ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

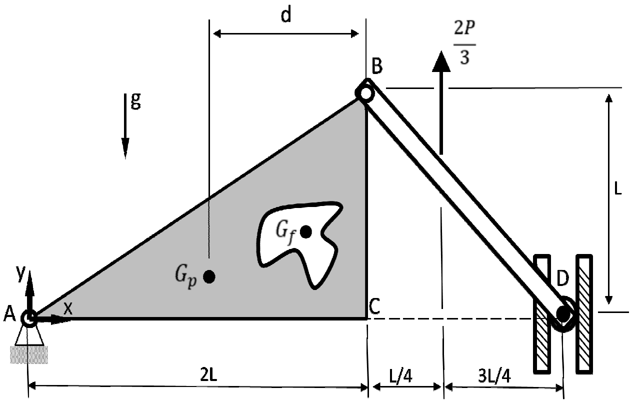
Mecânica **I** PME **3100** Prova nº **Rec.** Data **07 / 02 / 2023**

Duração da Prova: 120 minutos

Não é permitido o porte de calculadoras, "tablets", celulares e dispositivos similares.

QUESTÃO 1 (3,0 pontos): Uma estrutura **em equilíbrio** é composta pela placa furada *ABC* de peso *P* e por uma barra *BD* de massa desprezível. Nos pontos *A* e *B* da placa existem articulações; no ponto *D* há um anel. A articulação em *A* é fixa ao solo. A barra *BD* é submetida à força de módulo $2P/3$ conforme mostrado na figura. O centro de massa *Gp* da placa furada dista *d* da aresta *BC*. Pedem-se:

a) (0,5 ponto) o diagrama de corpo livre para a estrutura completa (ou seja, que mostre as forças externas ativas e as reações vinculares);



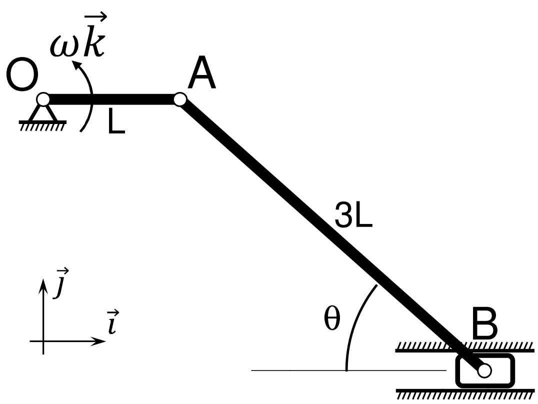
b) (0,5 ponto) o valor de *d* em função de *L* (sugestão: imponha o equilíbrio de momentos com respeito ao polo *A*);

c) (1,0 ponto) os diagramas de corpo livre da placa *ABC* e da barra *BD*;

d) (0,5 ponto) monte um sistema de equações que permita calcular as reações vinculares em *A* e em *D*, <u>explicitando claramente quais são as incógnitas a resolver</u> (**atenção**: **não** é necessário achar a solução desse sistema; **não** utilize o resultado obtido para *d* no item (b), ou seja, **suponha** *d*, além dos demais parâmetros do problema, **conhecido**).

e) (0,5 ponto) supondo-se que a placa seja homogênea, que sua massa inicial era $3m$ e que a massa de material retirado tenha sido $\frac{4}{5}m$, determine a abscissa do centro de massa G_f do material retirado, em relação ao sistema de coordenadas mostrado.

QUESTÃO 2 (3,5 pontos): No mecanismo mostrado na figura, a barra *OA*, de comprimento *L*, gira ao redor da articulação fixa *O*, com vetor de rotação $\vec{\omega}_{OA} = \omega\vec{k}$, constante. A extremidade *A* da barra *OA* está articulada à barra *AB*, de comprimento $3L$, cuja extremidade *B* está articulada a um bloco que desliza por guia horizontal. Para o instante mostrado na figura, no qual a barra *OA* está na horizontal, calcular:



a) (0,5 ponto) O vetor velocidade $\vec{V}_A$ do ponto *A*

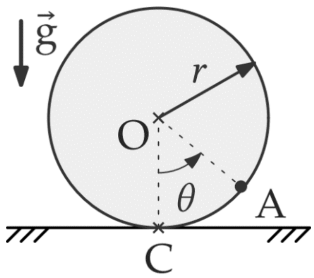
b) (0,5 ponto) Obter graficamente o CIR da barra *AB*

c) (1,0 ponto) O vetor de rotação $\vec{\omega}_{AB}$, da barra *AB*

d) (0,5 ponto) O vetor velocidade $\vec{V}_B$ do ponto *B*

e) (1,0 ponto) O vetor aceleração $\vec{a}_A$ do ponto *A*

QUESTÃO 3 (3,5 pontos): o disco homogêneo da figura, de centro O, raio r e massa m, rola **sem escorregar** sobre o plano horizontal. Existe uma partícula, de massa m, presa no ponto A da borda do disco. G é o centro de massa do corpo (disco + partícula) e C é o ponto de contato do disco com o plano. O corpo é abandonado, do repouso, na posição caracterizada por $\theta = \pi/2$. Pede-se:



Disco homogêneo:
$J_{Oz} = mr^2/2$

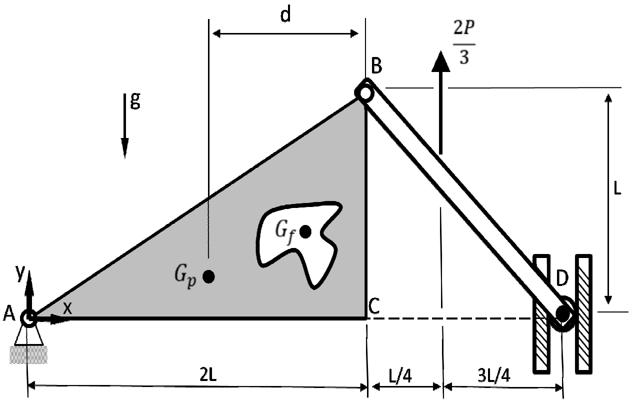
a) (1,0 ponto) o diagrama de corpo livre para $\theta = \pi/2$ (indique as forças nos seus sentidos corretos);

b) (1,0 ponto) os momentos de inércia J_{Oz}, J_{Gz} e J_{Cz} do corpo para uma configuração genérica θ;

c) (1,5 pontos) a velocidade angular ω do corpo quando $\theta = 0$ (aplique o TEC).

QUESTÃO 1 (3,0 pontos): Uma estrutura **em equilíbrio** é composta pela placa furada *ABC* de peso *P* e por uma barra *BD* de massa desprezível. Nos pontos *A* e *B* da placa existem articulações; no ponto *D* há um anel. A articulação em *A* é fixa ao solo. A barra *BD* é submetida à força de módulo 2*P*/3 conforme mostrado na figura. O centro de massa *Gp* da placa furada dista *d* da aresta *BC*. Pedem-se:

a) (0,5 ponto) o diagrama de corpo livre para a estrutura completa (ou seja, que mostre as forças externas ativas e as reações vinculares);



b) (0,5 ponto) o valor de *d* em função de *L* (sugestão: imponha o equilíbrio de momentos com respeito ao polo *A*);

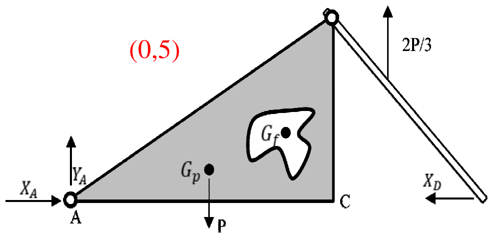
c) (1,0 ponto) os diagramas de corpo livre da placa *ABC* e da barra *BD*;

d) (0,5 ponto) monte um sistema de equações que permita calcular as reações vinculares em *A* e em *D*, explicitando claramente quais são as incógnitas a resolver (**atenção**: **não** é necessário achar a solução desse sistema; **não** utilize o resultado obtido para *d* no item (b), ou seja, **suponha** *d*, além dos demais parâmetros do problema, **conhecido**).

e) (0,5 ponto) supondo-se que a placa seja homogênea, que sua massa inicial era $3m$ e que a massa de material retirado tenha sido $\frac{4}{5}m$, determine a abscissa do centro de massa G_f do material retirado, em relação ao sistema de coordenadas mostrado.

Solução:

a) diagrama de corpo livre da estrutura completa

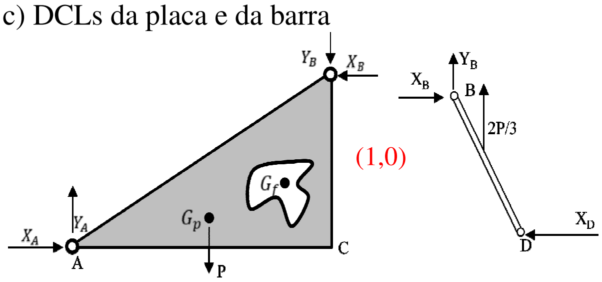


b) como a estrutura está em equilíbrio, tem-se:

$$\sum M_{Az} = 0 \Rightarrow \left(\frac{L}{4} + 2L\right)\frac{2P}{3} - (2L - d)P = 0 \Rightarrow$$

$d = \frac{L}{2}$ (0,5)

c) DCLs da placa e da barra



d) de acordo com o DCL da estrutura completa,

$$\left.\begin{aligned}
&\sum F_x = 0 \Rightarrow X_A - X_D = 0 && (1)\\
&\sum F_y = 0 \Rightarrow Y_A - P + \frac{2P}{3} = 0 && (2)\\
&\text{Impondo-se o equilíbrio da barra } BD,\\
&\sum M_{Bz} = 0 \Rightarrow -LX_D + \frac{L}{4}\frac{2P}{3} = 0 && (3)\\
&\text{3 equações para 3 incógnitas: } X_A, Y_A, X_D,
\end{aligned}\right\} (0,5)$$

com $X_A = \frac{P}{6}$; $Y_A = \frac{P}{3}$; $X_D = \frac{P}{6}$

d) Solução alternativa:

Placa

$\sum F_x = 0 \Rightarrow X_A - X_B = 0$ (1)

$\sum F_y = 0 \Rightarrow Y_A - P - Y_B = 0$ (2)

$\sum M_{Bz} = 0 \Rightarrow X_A L - Y_A 2L + Pd = 0$ (3)

Barra

$\sum F_x = 0 \Rightarrow X_B - X_D = 0$ (4)

$\sum F_y = 0 \Rightarrow Y_B + \frac{2P}{3} = 0$ (5)

$\sum M_{Bz} = 0 \Rightarrow -LX_D + \frac{L}{4}\frac{2P}{3} = 0$ (6)

6 equações para 6 incógnitas: $X_A, Y_A, d, X_B, Y_B, X_D$

e) A abcissa do baricentro do material retirado pode ser determinada considerando-se a composição de centros de massa da 'placa sem furos' e da 'placa furada', ou seja:

$$\left(3m - \frac{4}{5}m\right)(2L - d) = 3m\left(\frac{2}{3}(2L)\right) - \frac{4}{5}m\left(x_{G_2}\right)$$

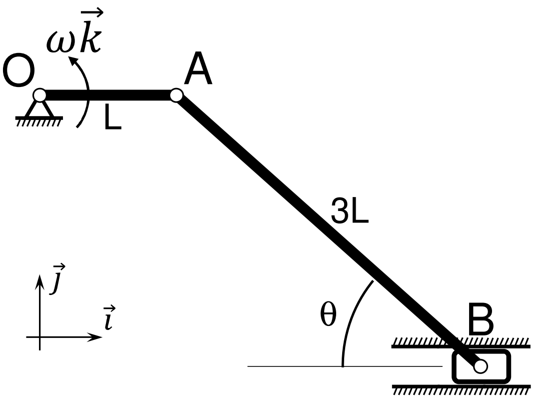
$$\frac{11}{5}m(2L - d) = 4mL - \frac{4}{5}m\left(x_{G_2}\right)$$

$$22L - 11d = 20L - 4x_{G_2} \Rightarrow x_{G_2} = -\frac{L}{2} + \frac{11}{4}d$$

Com $d = \frac{L}{2}$, temos que $x_{G_2} = \frac{7L}{8}$ (0,5)

QUESTÃO 2 (3,5 pontos): No mecanismo mostrado na figura, a barra *OA*, de comprimento *L*, gira ao redor da articulação fixa *O*, com vetor de rotação $\vec{\omega}_{OA} = \omega\vec{k}$, constante. A extremidade *A* da barra *OA* está articulada à barra *AB*, de comprimento $3L$, cuja extremidade *B* está articulada a um bloco que desliza por guia horizontal. Para o instante mostrado na figura, no qual a barra *OA* está na horizontal, calcular:

a) (0,5 ponto) o vetor velocidade $\vec{V}_A$ do ponto *A*
b) (0,5 ponto) obter graficamente o CIR da barra *AB*
c) (1,0 ponto) o vetor de rotação $\vec{\omega}_{AB}$, da barra *AB*
d) (0,5 ponto) o vetor velocidade $\vec{V}_B$ do ponto *B*
e) (1,0 ponto) o vetor aceleração $\vec{a}_A$ do ponto *A*

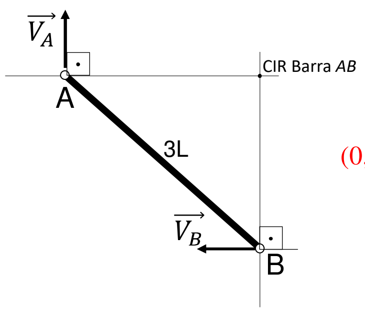


Solução:

a) Para a barra *OA*:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_O + \vec{\omega}_{OA} \wedge (A - O) \Rightarrow \vec{V}_A = \omega\vec{k} \wedge (L\vec{i}) \Rightarrow \vec{V}_A = \omega L\vec{j} \quad (0,5)$$

b)



(0,5)

c) Para barra *AB*:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_{CIR} + \vec{\omega}_{AB} \wedge (A - CIR)$$
$$\Rightarrow \omega L\vec{j} = \omega_{AB}\vec{k} \wedge (-3L\cos\theta\vec{i})$$

$$\Rightarrow \omega_{AB} = -\frac{\omega}{3\cos\theta} \Rightarrow \vec{\omega}_{AB} = -\frac{\omega}{3\cos\theta}\vec{k} \quad (1,0)$$

d) Para barra *AB*:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_{CIR} + \vec{\omega}_{AB} \wedge (B - CIR) \Rightarrow \vec{V}_B = -\frac{\omega}{3\cos\theta}\vec{k} \wedge (-3L sen\theta\vec{j}) \Rightarrow \vec{V}_B = -L\omega tg\theta\vec{i} \quad (0,5)$$

e) Para barra *OA*:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}}_{OA} \wedge (A - O) + \vec{\omega}_{OA} \wedge [\vec{\omega}_{OA} \wedge (A - O)]$$

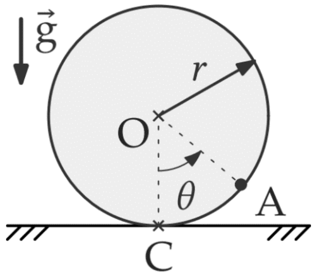
$$\Rightarrow \vec{a}_A = \omega\vec{k} \wedge [\omega\vec{k} \wedge (L\vec{i})] \Rightarrow \vec{a}_A = -\omega^2 L\vec{i} \quad (1,0)$$

QUESTÃO 3 (3,5 pontos): o disco homogêneo da figura, de centro O, raio r e massa m, rola **sem escorregar** sobre o plano horizontal. Existe uma partícula, de massa m, presa no ponto A da borda do disco. G é o centro de massa do corpo (disco + partícula) e C é o ponto de contato do disco com o plano. O corpo é abandonado, do repouso, na posição caracterizada por $\theta = \pi/2$. Pede-se:

a) (1,0 ponto) o diagrama de corpo livre para $\theta = \pi/2$ (indique as forças nos seus sentidos corretos);

b) (1,0 ponto) os momentos de inércia J_{Oz}, J_{Gz} e J_{Cz} do corpo para uma configuração genérica θ;

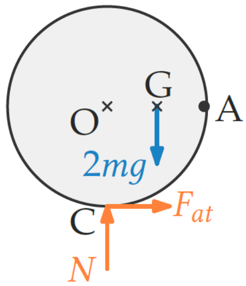
c) (1,5 pontos) a velocidade angular ω do corpo quando $\theta = 0$ (aplique o TEC).



Disco homogêneo:
$J_{Oz} = mr^2/2$

Solução:

a) Diagrama de corpo livre: figura ao lado.



(1,0)

b) Momentos de inércia:

$$J_{Oz} = \frac{mr^2}{2} + mr^2 = \frac{3mr^2}{2} \qquad (0,3)$$

$$J_{Gz} = J_{Oz} - 2m\left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{3mr^2}{2} - \frac{mr^2}{2} = mr^2 \qquad (0,3)$$

$$J_{Cz} = J_{Gz} + 2m\left[\left(r - \frac{r}{2}\cos\theta\right)^2 + \left(\frac{r}{2}\sin\theta\right)^2\right] = mr^2 + 2m\left[\frac{5r^2}{4} - r^2\cos\theta\right] = \left(\frac{7}{2} - 2\cos\theta\right)mr^2 \qquad (0,4)$$

c) Velocidade angular para $\theta = 0$ aplicando o TEC:

$$E - E_0 = W$$
$$E_0 = 0$$
$$E = \frac{1}{2}J_{Cz}\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{2} - 2\cos 0\right)mr^2\omega^2 = \frac{3}{4}mr^2\omega^2 \quad (0,5)$$

A única força externa que realiza trabalho é o peso da partícula:

$$W = mgr \qquad (0,5)$$

Portanto:

$$\frac{3}{4}mr^2\omega^2 = mgr \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{4}{3}\frac{g}{r} \quad \Leftrightarrow \quad |\omega| = 2\sqrt{\frac{g}{3r}} \qquad (0,5)$$