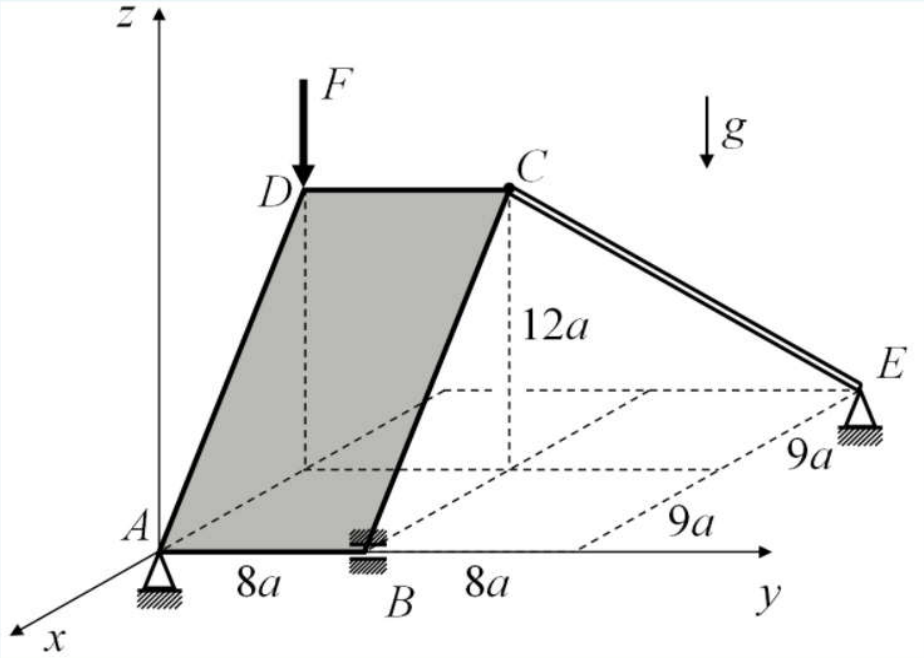
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia Mecânica

Mecânica **I** PME **3100** Prova nº **Rec.** Data **09 / 03 / 2021**

GABARITO

Questão 1: A placa retangular *ABCD*, de peso desprezível, está vinculada por meio da articulação simples (rótula) em *A*, o anel curto em *B* (o eixo do anel é *Ay*) e a barra *CE* biarticulada, de peso também desprezível. No ponto *C* existe uma articulação. A articulação simples em *E* tem coordenadas $(-18a, 16a, 0)$. As coordenadas do ponto *D* são $(-9a, 0, 12a)$. No vértice *D* da placa está aplicada uma carga vertical *F*, como indicado na figura. São dados: F = -48 N, a = 0.03 m.



a) (1,5 ponto) Determine o **módulo** da força que a barra *CE* aplica na placa, e escreva o valor no campo a seguir, com até uma casa decimal e **use PONTO como separador**;

b) (0,5 ponto) especifique se a barra está tracionada ou comprimida. No campo abaixo, escreva -1 se a barra *CE* está sendo comprimida, ou escreva 1 se ela estiver sendo tracionada;

c) (1,0 ponto) determine o **módulo** da componente Y_A (na direção do eixo *Ay*) da reação da articulação em *A* sobre a placa. Escreva o valor no quadro a seguir, com até uma casa decimal e **use PONTO como separador**;

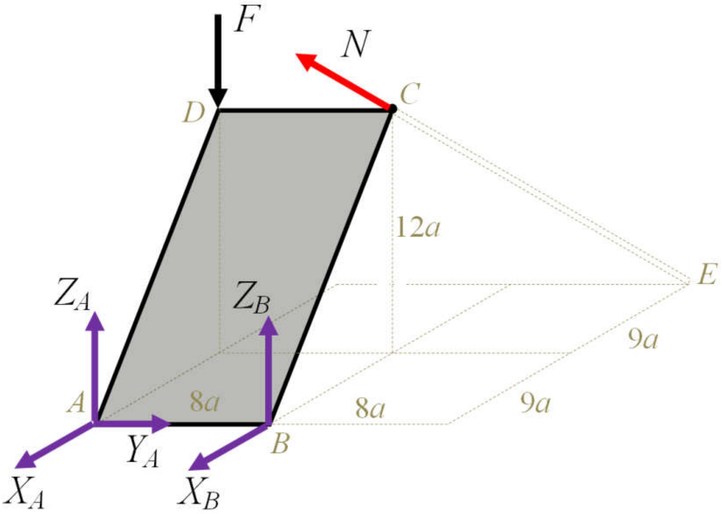
d) (0,5 ponto) especifique o sentido da componente Y_A. No campo abaixo, escreva -1 se Y_A é no sentido negativo do eixo Ay, e escreva 1 se Y_A é no sentido positivo do eixo Ay.

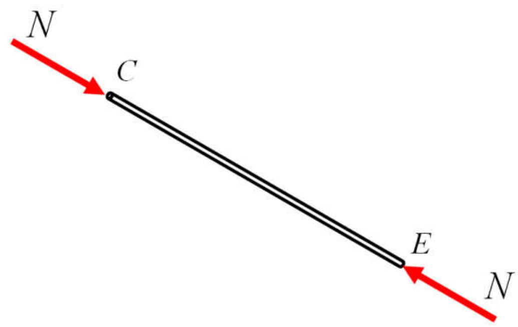
Solução

(Os valores numéricas são alterados a cada tentativa)

a) (1,5 ponto) Determine o módulo da força que a barra *CE* aplica na placa, e escreva o valor no campo a seguir, com até uma casa decimal e **use PONTO como separador**;

Diagramas de corpo livre





Notando que a barra *CE* é uma barra de treliça, a força $\vec{N}$ tem a direção de $(C-E)$:

$$\vec{N}=N\frac{(C-E)}{|C-E|}=N\frac{9a\vec{i}-8a\vec{j}+12a\vec{k}}{\sqrt{(9a)^2+(-8a)^2+(12a)^2}}=N\left(\frac{9a\vec{i}-8a\vec{j}+12a\vec{k}}{17a}\right)\Rightarrow \vec{N}=\frac{N}{17}\left(9\vec{i}-8\vec{j}+12\vec{k}\right)$$

Para achar o valor de N basta impor o equilíbrio de momentos ao redor do eixo Ay:

$$M_{Ay}=\vec{M}_A\cdot\vec{j}=0$$

O momento polar em relação a A se escreve como:

$$\vec{M}_A=(C-A)\wedge\vec{N}+(D-A)\wedge\vec{F}=a\left(-9\vec{i}+8\vec{j}+12\vec{k}\right)\wedge\frac{N}{17}\left(9\vec{i}-8\vec{j}+12\vec{k}\right)+a\left(-9\vec{i}+12\vec{k}\right)\wedge\left(-F\vec{k}\right)$$

$$\vec{M}_A=\frac{192}{17}Na\vec{i}+\frac{216}{17}Na\vec{j}-9Fa\vec{j}\Rightarrow\vec{M}_A=\frac{192}{17}Na\vec{i}+\left(\frac{216}{17}N-9F\right)a\vec{j}$$

Portanto:

$$M_{Ay}=\vec{M}_A\cdot\vec{j}=0\Rightarrow\left[\frac{192}{17}Na\vec{i}+\left(\frac{216}{17}N-9F\right)a\vec{j}\right]\cdot\vec{j}=0\Rightarrow\left(\frac{216}{17}N-9F\right)a=0\Rightarrow N=\frac{17}{24}F\Rightarrow$$

$$\boxed{|\vec{N}|=\frac{17}{24}|F|}$$

b) (0,5 ponto) especifique se a barra está tracionada ou comprimida. No campo abaixo, escreva -1 se a barra *CE* está sendo comprimida, ou escreva 1 se ela estiver sendo tracionada;

Observando o resultado do item (a) e os diagramas de corpo livre, conclui-se que a barra *CE* está sendo $\boxed{\text{comprimida}}$ para $F>0$

c) (1,0 ponto) determine o módulo da componente Y_A (na direção do eixo Ay) da reação da articulação em A sobre a placa. Escreva o valor no quadro a seguir, com até uma casa decimal e **use PONTO como separador**;

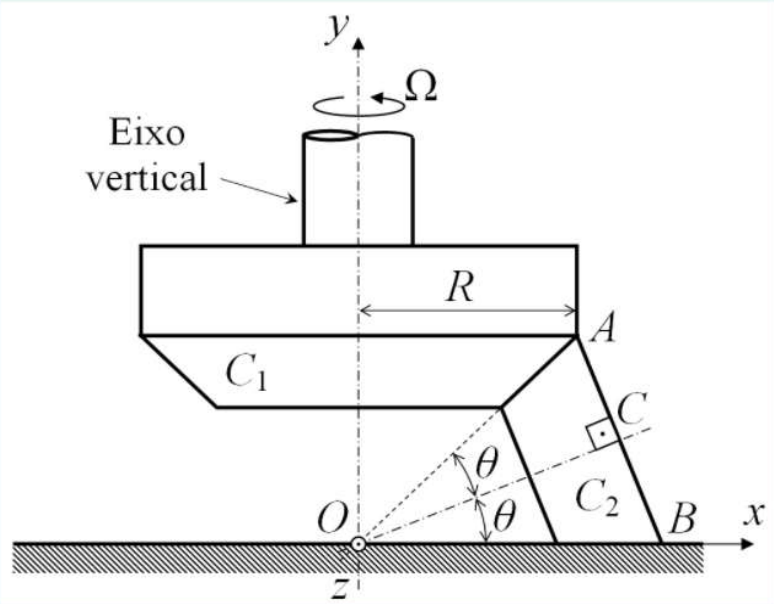
Sendo $\vec{N} = \frac{N}{17}\left(9\vec{i} - 8\vec{j} + 12\vec{k}\right) = \frac{F}{24}\left(9\vec{i} - 8\vec{j} + 12\vec{k}\right)$, e observando o diagrama de corpo livre da placa, resulta, do equilíbrio de forças na direção do eixo Ay:

$$Y_A - \frac{8}{24}F = 0 \Rightarrow \boxed{\left|Y_A\right| = \frac{1}{3}\left|F\right|}$$

d) (0,5 ponto) especifique o sentido da componente Y_A . No campo abaixo, escreva -1 se Y_A é no sentido negativo do eixo Ay , e escreve 1 se Y_A é no sentido positivo do eixo Ay.

Observando a resposta do item (c) e o diagrama de corpo livre, conclui-se que Y_A é no sentido positivo do eixo Ay para $F > 0$

Questão 2 - Parte 1 (1,0 ponto): O tronco de cone C_1 gira solidário a um eixo vertical com velocidade angular constante Ω; o tronco de cone C_2 move-se mantendo o contato com o tronco de cone C_1 e o plano horizontal. Considere que não ocorra escorregamento nos contatos e expresse todos os vetores no sistema de coordenadas (*O, x,y,z*), cujo eixo *y* é a linha de centro do eixo vertical e cujo plano *x,y* contém as geratrizes de contato *OA* e *OB* do cone C_2, conforme indicado na figura.



Assinale as alternativas corretas. Importante: cada resposta errada anula uma resposta correta:

Escolha uma ou mais:

X $\vec{a}_A = -\Omega^2 R\vec{i}$, considerando que o ponto *A* pertence a C_1; $\vec{v}_B = \vec{0}$;

☐ $\vec{v}_A = -\Omega R\vec{k}$; $\vec{a}_A = -\Omega^2 R cos2\theta\vec{i}$, considerando que o ponto *A* pertence a C_1;

X $\vec{v}_A = -\Omega R\vec{k}$, considerando que o ponto *A* pertence a C_1; $\vec{v}_C = -\frac{\Omega R}{2}\vec{k}$;

☐ $\vec{a}_A = -\Omega^2 R cos2\theta\vec{i}$, considerando que o ponto *A* pertence a C_1; $\vec{a}_B = \vec{0}$;

Solução:

$\vec{v}_A = \vec{v}_O + \Omega\vec{j} \wedge (A - O) \Rightarrow \vec{v}_A = -\Omega R\,\vec{k}$

$\vec{v}_B = \vec{0}$

$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \dot{\Omega}\vec{j} \wedge (A - O) + \Omega\vec{j} \wedge [\ \Omega\vec{j} \wedge (A - O)] \Rightarrow \vec{a}_A = -\Omega^2 R\,\vec{\imath}$

$\vec{v}_C = \dfrac{\vec{v}_A}{2} \Rightarrow \vec{v}_C = \dfrac{-\Omega R\,\vec{k}}{2}$

Observação: a ordem dos itens é alterada aleatoriamente.

Questão 2 - Parte 2 (1,0 ponto): Considerando a mesma figura e mesmo enunciado da Questão 2 - Parte 1, calcule o vetor de rotação $\vec{\omega}$ do tronco de cone C_2 e assinale a alternativa correta:

Escolha uma opção:

X $\vec{\omega} = -\frac{\Omega}{tan2\theta}\vec{i}$;

○ $\vec{\omega} = \Omega tan2\theta\vec{i}$;

○ $\vec{\omega} = -\frac{\Omega}{tan2\theta}(cos\theta\vec{i} + sin\theta\vec{j})$;

○ $\vec{\omega} = -\Omega(cos2\theta\vec{i} - sin2\theta\vec{j})$;

○ $\vec{\omega} = -\frac{\Omega}{sin2\theta}cos^2 2\theta\vec{i}$;

Solução:

A geratriz de contato *OB* é o eixo helicoidal instantâneo do cone C_2, logo, $\vec{\omega} = \omega\vec{\imath}$.

$\vec{v}_A = \vec{v}_O + \omega\vec{\imath} \wedge (A - O)$

$$(A - O) = \frac{R}{\cos 2\theta}(\cos 2\theta\,\vec{\imath} + \sin 2\theta\,\vec{\jmath}) \Rightarrow -\Omega R\,\vec{k} = \omega\, R\,\tan 2\theta\,\vec{k} \Rightarrow \vec{\omega} = -\frac{\Omega}{\tan 2\theta}\vec{\imath}$$

Observação: a ordem dos itens é alterada aleatoriamente.

Questão 2 - Parte 3 (1,0 ponto): Considere a mesma figura do enunciado da Questão 2 Parte 1. Nesta Parte 3, o sistema mostrado na figura encontra-se dentro de um elevador que sobe com velocidade $\vec{v}_0$ e aceleração $\vec{a}_0$ conhecidas. Adote o elevador como referencial móvel (referencial auxiliar). Assinale as alternativas corretas. Importante: cada resposta errada anula uma resposta correta:

Escolha uma ou mais:

X $\vec{a}_{A,rel} = -\Omega^2 R\vec{i}$ e $\vec{a}_{A,arr} = \vec{a}_0$, considerando que o ponto *A* pertence a C_1;

☐ $\vec{v}_B = \vec{v}_0$ e $\vec{a}_{A,Cor} = 2\Omega^2 R\vec{i}$, considerando que o ponto *A* pertence a C_1;

X $\vec{v}_{A,arr} = \vec{v}_0$ e $\vec{v}_{A,rel} = -\Omega R\vec{k}$;

☐ $\vec{a}_{B,rel} = -\Omega^2 R tan\theta tan2\theta\vec{i}$ e $\vec{a}_{B,arr} = \vec{a}_0$;

Solução:

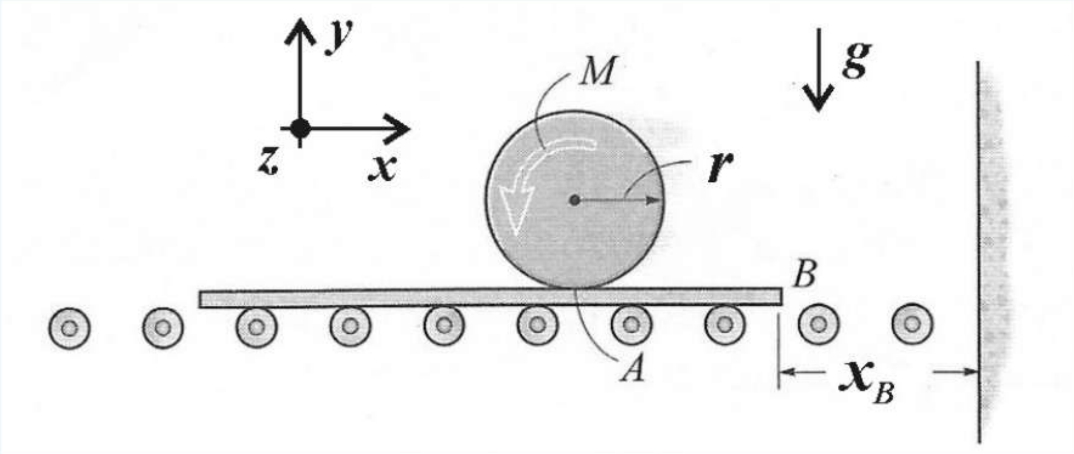
$\vec{\omega}_{arr} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}_{A,Cor} = \vec{0}$; e os resultados calculados na parte 1 aplicam-se ao movimento relativo:

$\vec{v}_{A,rel} = -\Omega R\,\vec{k}$; $\vec{a}_{A,rel} = -\Omega^2 R\,\vec{\imath}$; $\vec{v}_{B,rel} = \vec{0}$; no movimento relativo $\vec{a}_{B,rel} = a_{B,rel}\vec{\jmath}$.

No movimento de arrastamento: $\vec{v}_{A,arr} = \vec{v}_0$; $\vec{a}_{A,arr} = \vec{a}_0$

Observação: a ordem dos itens é alterada aleatoriamente.

Questão 3: O cilindro de massa m_c = 10 kg e raio r = 0.375 m está em repouso sobre uma placa de massa m_p = 1 kg, também em repouso (vide Fig).



Suponha que não haja escorregamento entre o cilindro e a placa e despreze a massa dos roletes embaixo da placa. Se um binário de momento M =100 Nm for aplicado ao cilindro, determine:

Dado: $J_G = \frac{m_c r^2}{2}$

a) (0,7 ponto) A aceleração angular α do cilindro (escreva a resposta no campo a seguir, com até três casas decimais, e **use PONTO como separador**);

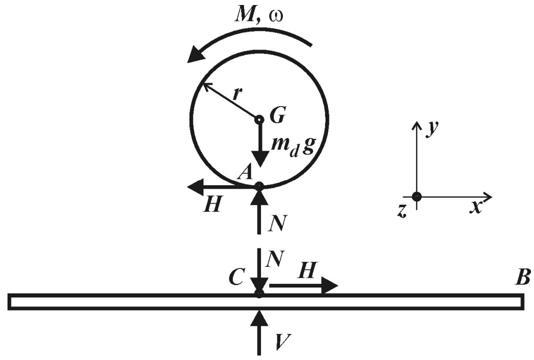
b) (0,7 ponto) a força horizontal H entre o cilindro e a placa (escreva a resposta no campo a seguir, com até três casas decimais, e **use PONTO como separador**);

c) (0,7 ponto) a aceleração a_G do centro de massa G do cilindro (escreva a resposta no campo a seguir, com até três casas decimais, e **use PONTO como separador**);

d) (0,7 ponto) a aceleração a_p da placa (escreva a resposta no campo a seguir, com até três casas decimais, e **use PONTO como separador**);

e) (0,7 ponto) o tempo t necessário para a extremidade B da placa se deslocar de x_B=0.9 m para a direita e bater na parede (escreva a resposta no campo a seguir, com até três casas decimais, e **use PONTO como separador**).

Solução:
(Os valores numéricas são alterados a cada tentativa)



Disco:
TR em x: $m_d a_G = -H$ (1)
TQMA, polo G: $J_G \dot{\omega} = M - Hr$ (2)

Placa:
TR em x: $m_p a_C = m_p a_B = H$ (3)

Cinemática:
Placa em translação, sem escorregamento:
$\vec{v}_B = v_B \vec{\imath} = \vec{v}_C = \vec{v}_A = \vec{v}_G + \vec{\omega} \wedge (A - G) = v_G \vec{\imath} + \omega \vec{k} \wedge (-r\vec{\jmath}) = (v_G + \omega r)\vec{\imath} \Rightarrow$
$\Rightarrow v_B = v_G + \omega r \Rightarrow a_B = a_G + \dot{\omega} r$ (4)

Usando (1) e (3) em (4):
$\frac{H}{m_p} = -\frac{H}{m_d} + \dot{\omega} r \Rightarrow H = \dot{\omega} r \left(\frac{m_p m_d}{m_p + m_d}\right)$ (5)

(a) Substituindo em (2):

$$\frac{m_d r^2}{2}\dot{\omega} = M - \dot{\omega} r^2 \left(\frac{m_p m_d}{m_p + m_d}\right) \Rightarrow \boldsymbol{\dot{\omega} = M \frac{2(m_p + m_d)}{r^2(m_d^2 + 3m_p m_d)}} = cte$$

(b) Substituindo em (5): $\boldsymbol{H = M \frac{2m_p m_d}{r(m_d^2 + 3m_p m_d)}}$

(c) Substituindo em (1): $\boldsymbol{a_G = -M \frac{2m_p}{r(m_d^2 + 3m_p m_d)}}$

(d) Substituindo em (3): $\boldsymbol{a_B = M \frac{2m_d}{r(m_d^2 + 3m_p m_d)}}$

(e) Com aceleração a_B constante: $x_B = \frac{1}{2} a_B t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2x_B}{a_B}} = \sqrt{\boldsymbol{x_B \frac{r(m_d^2 + 3m_p m_d)}{m_d M}}}$