ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

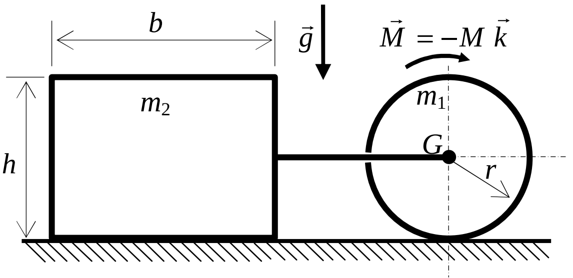
Departamento de Engenharia Mecânica

Mecânica **I** PME **3100** Prova nº **Rec.** Data **10 / 12 / 2019**

Duração da Prova: 120 minutos

Não é permitido o porte de calculadoras, "tablets", celulares e dispositivos similares.

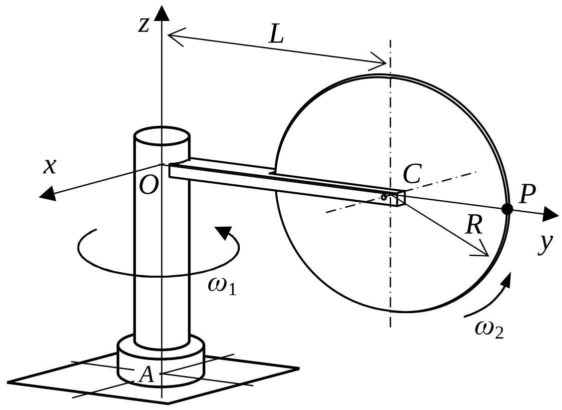
Questão 1 (3,0 pontos): Na figura abaixo, o disco homogêneo possui massa m_1 e o bloco homogêneo possui massa m_2. Um cabo ideal horizontal une o disco (por meio de uma articulação no centro *G*) e o bloco. O conjunto é mantido em **equilíbrio estático** aplicando-se ao disco o momento $\vec{M} = -M\,\vec{k}$. O coeficiente de atrito entre a superfície plana horizontal e ambos os corpos é μ. Pede-se:



a) os diagramas de corpo livre do disco e do bloco;

b) em função de m_1, m_2, g e r, o valor máximo que *M* pode ter para que o sistema permaneça em equilíbrio sem que haja escorregamento do disco ou do bloco **na iminência do movimento do disco para a direita. Desconsidere a possibilidade de tombamento do bloco.**

Questão 2 (3,5 pontos): No mecanismo mostrado na figura, o segmento $\overline{OA}$ é fixo, e a barra *OC*, de comprimento *L* e perpendicular a $\overline{OA}$, possui vetor de rotação $\vec{\omega}_1 = \omega_1\vec{k}$ (constante) em relação a um referencial fixo no solo. O disco, de centro *C* e raio *R*, contido no plano *Oyz*, possui um vetor de rotação $\vec{\omega}_2 = \omega_2\vec{i}$ em relação à barra *OC*, sendo ω_2 constante. O sistema de coordenadas *Oxyz* é fixo na barra *OC*. Considerando a barra *OC* como referencial móvel, e o instante mostrado na figura, quando $(P - C)$ é paralelo ao eixo *Oy*, determine:

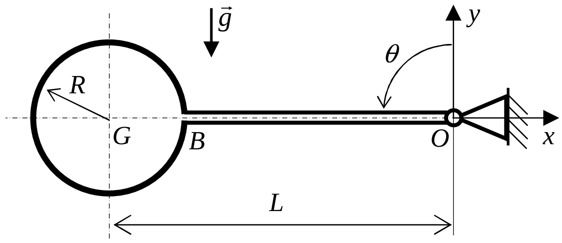


a) as velocidades relativa ($\vec{v}_{P,rel}$), de arrastamento ($\vec{v}_{P,arr}$) e absoluta ($\vec{v}_{P,abs}$) do ponto *P*;

b) as acelerações relativa ($\vec{a}_{P,rel}$), de arrastamento ($\vec{a}_{P,arr}$), de Coriolis ($\vec{a}_{P,Cor}$) e absoluta ($\vec{a}_{P,abs}$) do ponto *P*;

c) o vetor de rotação absoluto ($\vec{\omega}_{D,abs}$) e o vetor aceleração angular absoluto ($\vec{\alpha}_{D,abs}$) do disco.

Questão 3 (3,5 pontos): A figura ilustra um **corpo rígido único** constituído por uma barra *OB*, de inércia desprezível, soldada a um disco homogêneo de centro *G*, raio *R* e massa *m*. Sabendo que o sistema parte do **repouso** da configuração $\theta = \pi/2$, e que o momento de inércia do corpo rígido em relação ao ponto *O* é J_{Oz}:



a) desenhe o diagrama de corpo livre no instante inicial;

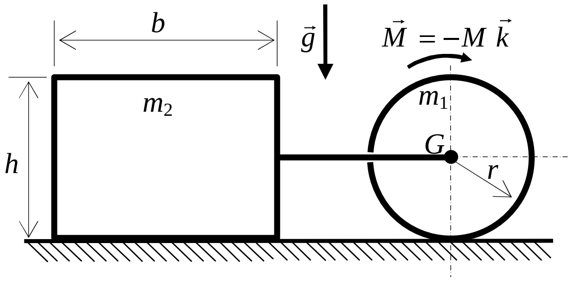
b) na configuração inicial ($\theta = \pi/2$), e em função de *R*, *m*, *g*, *L* e J_{Oz}, determine o vetor aceleração angular ($\vec{\alpha}$) do corpo usando o teorema da quantidade de movimento angular, e calcule a aceleração do centro de massa *G* ($\vec{a}_G$);

c) usando o teorema da resultante, determine as componentes da reação em *O* na mesma configuração do item (b);

d) usando o teorema da energia cinética, determine o vetor rotação ($\vec{\omega}$) do corpo quando $\theta = \pi$, em função de *R*, *m*, *g*, *L* e J_{Oz};

e) Dado $J_{Gz} = mR^2/2$, calcule o momento de inércia J_{Oz} em função de *m*, *R* e *L*.

Questão 1 (3,0 pontos): Na figura abaixo, o disco homogêneo possui massa m_1 e o bloco homogêneo possui massa m_2. Um cabo ideal horizontal une o disco (por meio de uma articulação no centro *G*) e o bloco. O conjunto é mantido em **equilíbrio estático** aplicando-se ao disco o momento $\vec{M} = -M\,\vec{k}$. O coeficiente de atrito entre a superfície plana horizontal e ambos os corpos é μ. Pede-se:

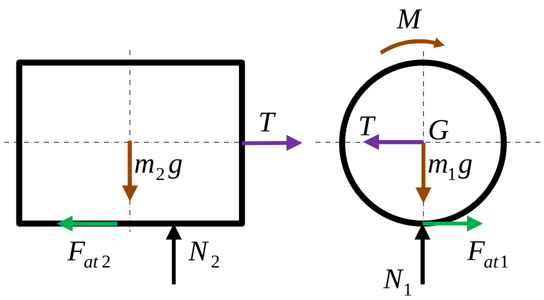


a) os diagramas de corpo livre do disco e do bloco;

b) em função de m_1, m_2, g e r, o valor máximo que M pode ter para que o sistema permaneça em equilíbrio sem que haja escorregamento do disco ou do bloco **na iminência do movimento do disco para a direita. Desconsidere a possibilidade de tombamento do bloco.**

Solução

a) Diagramas de corpo livre do disco e do bloco:



0,5 0,5

b) Equilíbrio do disco:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{at1} - T = 0 \Rightarrow T = F_{at1} \qquad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_1 - m_1 g = 0 \Rightarrow N_1 = m_1 g \qquad (2)$$

0,5

$$\sum M_{Gz} = 0 \Rightarrow F_{at1} r - M = 0 \Rightarrow F_{at1} = \frac{M}{r} \qquad (3)$$

De (1) e (3): $T = \dfrac{M}{r}$ (4)

De (3) e (2), e impondo a condição limite para o atrito: $F_{at1} = \dfrac{M}{r} \le \mu N_1 = \mu m_1 g$, logo:

$\boxed{M \le \mu m_1 g\, r}$ (condição 1)

Equilíbrio do bloco (escorregamento):

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow T - F_{at2} = 0 \Rightarrow F_{at2} = T \qquad (5)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_2 - m_2 g = 0 \Rightarrow N_2 = m_2 g \qquad (6)$$

0,5

De (4) em (5): $F_{at2} = \dfrac{M}{r}$ (7)

De (7) e (6), e impondo a condição limite para o atrito: $\Rightarrow F_{at2} = \dfrac{M}{r} \le \mu N_2 = \mu m_2 g$

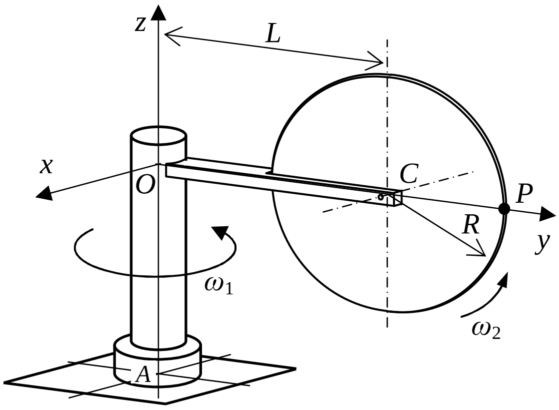
$\boxed{\Rightarrow M \le \mu m_2 g\, r}$ (condição 2)

Portanto:

Condiçoes de equilibrio: 1,0

$\boxed{M_{máx} = \min(\text{condição 1, condição 2})}$

Questão 2 (3,5 pontos): No mecanismo mostrado na figura, o segmento $\overline{OA}$ é fixo, e a barra *OC*, de comprimento *L* e perpendicular a $\overline{OA}$, possui vetor de rotação $\vec{\omega}_1 = \omega_1\vec{k}$ (constante) em relação a um referencial fixo no solo. O disco, de centro *C* e raio *R*, contido no plano *Oyz*, possui um vetor de rotação $\vec{\omega}_2 = \omega_2\vec{i}$ em relação à barra *OC*, sendo ω_2 constante. O sistema de coordenadas *Oxyz* é fixo na barra *OC*. Considerando a barra *OC* como referencial móvel, e o instante mostrado na figura, quando $(P-C)$ é paralelo ao eixo *Oy*, determine:



a) as velocidades relativa ($\vec{v}_{P,rel}$), de arrastamento ($\vec{v}_{P,arr}$) e absoluta ($\vec{v}_{P,abs}$) do ponto *P*;

b) as acelerações relativa ($\vec{a}_{P,rel}$), de arrastamento ($\vec{a}_{P,arr}$), de Coriolis ($\vec{a}_{P,Cor}$) e absoluta ($\vec{a}_{P,abs}$) do ponto *P*;

c) o vetor de rotação absoluto ($\vec{\omega}_{D,abs}$) e o vetor aceleração angular absoluto ($\vec{\alpha}_{D,abs}$) do disco.

Solução

a)

$$\vec{v}_{P,rel} = \vec{v}_{C,rel} + \vec{\omega}_{rel} \wedge (P-C) = \vec{0} + \omega_2\vec{i} \wedge R\vec{j} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{P,rel} = \omega_2 R\vec{k}}$$ **0,5**

$$\vec{v}_{P,arr} = \vec{v}_O + \vec{\omega}_{arrl} \wedge (P-O) = \vec{0} + \omega_1\vec{k} \wedge (L+R)\vec{j} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{P,arr} = -\omega_1(L+R)\vec{i}}$$ **0,5**

$$\vec{v}_{P,abs} = \vec{v}_{P,rel} + \vec{v}_{P,arr} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{P,abs} = -\omega_1(L+R)\vec{i} + \omega_2 R\vec{k}}$$

b)

$$\vec{a}_{P,rel} = \vec{a}_{C,rel} + \vec{\alpha}_{rel} \wedge (P-C) + \vec{\omega}_{rel} \wedge [\vec{\omega}_{rel} \wedge (P-C)]$$

$$\vec{a}_{P,rel} = \vec{0} + \vec{0} + \omega_2\vec{i} \wedge (\omega_2\vec{i} \wedge R\vec{j}) \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{P,rel} = -\omega_2^2 R\vec{j}}$$ **0,5**

$$\vec{a}_{P,arr} = \vec{a}_O + \vec{\alpha}_{arr} \wedge (P-O) + \vec{\omega}_{arr} \wedge [\vec{\omega}_{arr} \wedge (P-O)]$$

$$\vec{a}_{P,arr} = \vec{0} + \vec{0} + \omega_1\vec{k} \wedge [\omega_1\vec{k} \wedge (L+R)\vec{j}] \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{P,arr} = -\omega_1^2(L+R)\vec{j}}$$ **0,5**

$$\vec{a}_{P,Cor} = 2\vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{v}_{P,rel} \Rightarrow \vec{a}_{P,Cor} = 2\omega_1\vec{k} \wedge \omega_2 R\vec{k} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{P,Cor} = \vec{0}}$$ **0,5**

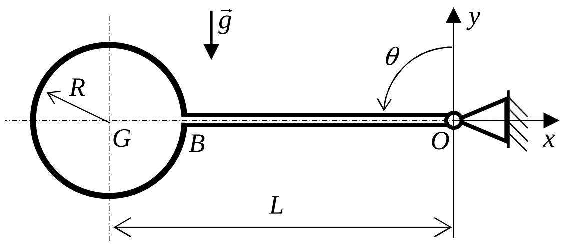
$$\vec{a}_{P,abs} = \vec{a}_{P,rel} + \vec{a}_{P,arr} + \vec{a}_{P,Cor} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{P,abs} = -[\omega_1^2(L+R) + \omega_2^2 R]\vec{j}}$$

c)

$$\vec{\omega}_{D,abs} = \vec{\omega}_{D,rel} + \vec{\omega}_{D,arr} \Rightarrow \boxed{\vec{\omega}_{D,abs} = \omega_2\vec{i} + \omega_1\vec{k}}$$ **0,5**

$$\vec{\alpha}_{D,abs} = \vec{\alpha}_{D,rel} + \vec{\alpha}_{D,arr} + \vec{\omega}_{D,arr} \wedge \vec{\omega}_{D,rel} \Rightarrow \vec{\alpha}_{D,abs} = \vec{0} + \vec{0} + \omega_1\vec{k} \wedge \omega_2\vec{i} \Rightarrow \boxed{\vec{\alpha}_{D,abs} = \omega_1\omega_2\vec{j}}$$ **0,5**

Questão 3 (3,5 pontos): A figura ilustra um **corpo rígido único** constituído por uma barra OB, de inércia desprezível, soldada a um disco homogêneo de centro G, raio R e massa m. Sabendo que o sistema parte do **repouso** da configuração $\theta = \pi/2$, e que o momento de inércia do corpo rígido em relação ao ponto O é J_{Oz}:



a) desenhe o diagrama de corpo livre no instante inicial;

b) na configuração inicial ($\theta = \pi/2$), e em função de R, m, g, L e J_{Oz}, determine o vetor aceleração angular ($\vec{\alpha}$) do corpo usando o teorema da quantidade de movimento angular, e calcule a aceleração do centro de massa G ($\vec{a}_G$);

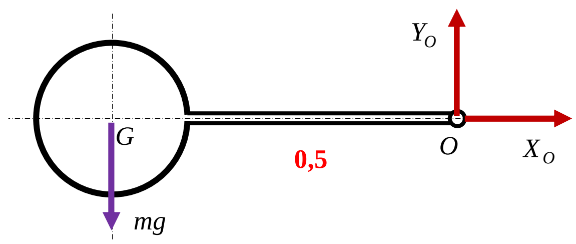
c) usando o teorema da resultante, determine as componentes da reação em O na mesma configuração do item (b);

d) usando o teorema da energia cinética, determine o vetor rotação ($\vec{\omega}$) do corpo quando $\theta = \pi$, em função de R, m, g, L e J_{Oz};

e) Dado $J_{Gz} = mR^2/2$, calcule o momento de inércia J_{Oz} em função de m, R e L.

Solução

a) Diagrama de corpo livre:



b) Teorema da Quantidade de Movimento Angular, pólo O:

$$J_{Oz}\alpha = M_{Oz} \Rightarrow J_{Oz}\alpha = mgL \Rightarrow \boxed{\vec{\alpha} = \frac{mgL}{J_{Oz}}\vec{k}} \quad 0{,}5$$

Campo de acelerações:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_O + \vec{\alpha} \wedge (G - O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G - O)] \Rightarrow \vec{a}_G = \vec{0} + \frac{mgL}{J_{Oz}}\vec{k} \wedge (-L\vec{i}) + \vec{0} \wedge [\vec{0} \wedge (G - O)]$$

$$\boxed{\vec{a}_G = -\frac{mgL^2}{J_{Oz}}\vec{j}} \quad 0{,}5$$

c) Teorema da resultante:

$$\left.\begin{aligned} & ma_{Gx} = X_O \Rightarrow \boxed{X_O = 0} \\ & ma_{Gy} = Y_O - mg \Rightarrow Y_O = m(a_{Gy} + g) \Rightarrow \boxed{Y_O = mg\left(-\frac{mL^2}{J_{Oz}} + 1\right)} \end{aligned}\right\} \quad 0{,}5$$

d) Teorema da Energia Cinética:

Como parte do repouso: $E_f - E_i = W \Rightarrow \dfrac{J_{Oz}\omega^2}{2} - 0 = mgL \Rightarrow \omega^2 = \dfrac{2mgL}{J_{Oz}} \Rightarrow \boxed{\vec{\omega} = \sqrt{\dfrac{2mgL}{J_{Oz}}}\,\vec{k}}$ **1,0**

e) Momento de inércia em relação ao pólo O:
Usando o teorema dos eixos paralelos:

$$J_{Oz} = J_{Gz} + mL^2 \Rightarrow J_{Oz} = \frac{mR^2}{2} + mL^2 \Rightarrow \boxed{J_{Oz} = m\left(\frac{R^2}{2} + L^2\right)} \quad 0{,}5$$