ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

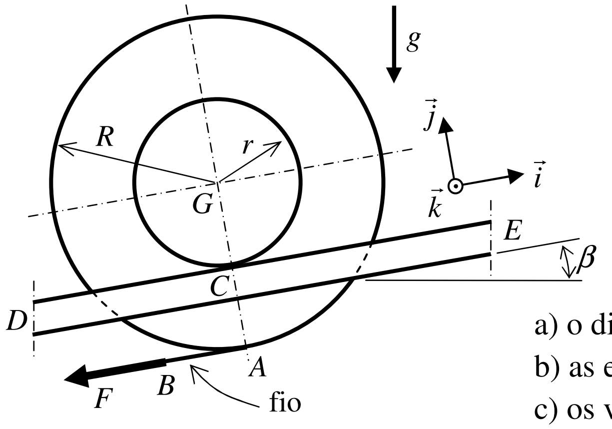
Departamento de Engenharia Mecânica

Mecânica I PME 3100 Prova nº Rec. Data 12 / 02 / 2019

Duração da Prova: 120 minutos

Não é permitido o porte de calculadoras, "tablets", celulares e dispositivos similares.

QUESTÃO 1 (3,0 pontos) – Um carretel de massa M é formado por dois cilindros, de raios R e r, soldados um ao outro, e tem um fio ideal enrolado na circunferência do cilindro (G,R). Esse carretel é colocado sobre um trilho fixo e inclinado DE, num plano vertical, e uma força F paralela ao trilho é aplicada na ponta B do fio, conforme mostrado na figura ao lado. Sabe-se que o coeficiente de atrito estático entre o carretel e o trilho é μ, e que o sistema está em **equilíbrio estático**. Usando o sistema de coordenadas indicado na figura, e em função dos dados, pede-se:



a) o diagrama de corpo livre do carretel;

b) as equações de equilíbrio do carretel;

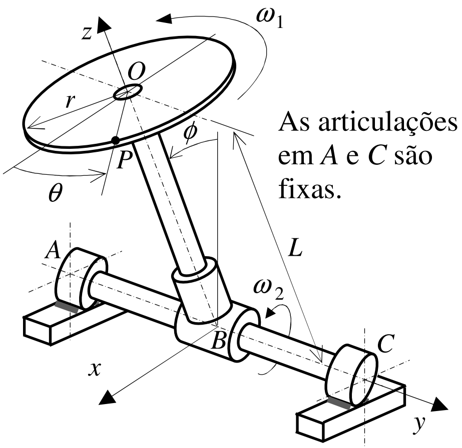
c) os valores da força F e da reação no ponto de contato C;

d) o valor máximo de β em função de μ para que haja o equilíbrio estático.

QUESTÃO 2 (3,5 pontos) – O disco de centro O e raio r gira em torno da peça OB com velocidade angular constante $\dot{\theta} = \omega_1$. O conjunto, por sua vez, gira em torno do eixo horizontal AC, com velocidade angular constante $\dot{\phi} = \omega_2$.

Considere a peça OB como o referencial móvel, ao qual é solidário o sistema cartesiano $Bxyz$.

Na posição da figura, dada pelos ângulos (ϕ, θ), e expressando os resultados na base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ associada ao sistema cartesiano, pede-se:



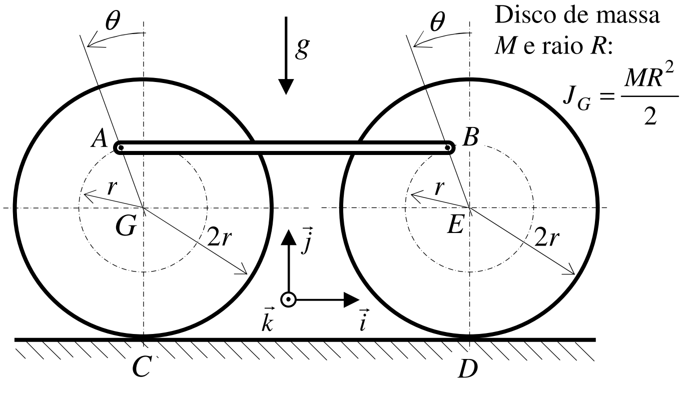
a) o vetor de rotação $\vec{\omega}$ do disco, indicando suas componentes de arrastamento $\vec{\omega}_a$ e relativa $\vec{\omega}_r$;

b) a velocidade $\vec{v}$ do ponto P, indicando suas componentes de arrastamento $\vec{v}_a$ e relativa $\vec{v}_r$;

c) a aceleração $\vec{a}$ do ponto P, indicando suas componentes de arrastamento $\vec{a}_a$, relativa $\vec{a}_r$ e complementar $\vec{a}_c$;

d) o vetor aceleração angular absoluta $\vec{\alpha}$ do disco de centro O.

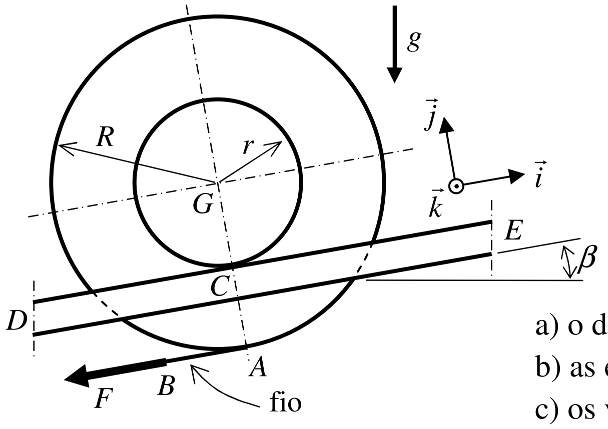
QUESTÃO 3 (3,5 pontos) – Os discos homogêneos, cada um de massa m e raio $2r$, rolam sem escorregar em relação ao solo. A barra homogênea AB, de massa $2m$, é articulada nos discos nos pontos A e B, sem atrito. O sistema é abandonado do repouso na posição $\theta = 0$, e uma perturbação infinitesimal inicia o movimento. Pede-se, para o instante em que $\theta = \pi$:



a) o vetor de rotação $\vec{\omega}$ dos discos;

b) o vetor aceleração angular $\vec{\alpha}$ dos discos e as forças que agem nas extremidades da barra AB.

QUESTÃO 1 (3,0 pontos) – Um carretel de massa M é formado por dois cilindros, de raios R e r, soldados um ao outro, e tem um fio ideal enrolado na circunferência do cilindro (G,R). Esse carretel é colocado sobre um trilho fixo e inclinado DE, num plano vertical, e uma força F paralela ao trilho é aplicada na ponta B do fio, conforme mostrado na figura ao lado. Sabe-se que o coeficiente de atrito estático entre o carretel e o trilho é μ, e que o sistema está em **equilíbrio estático**. Usando o sistema de coordenadas indicado na figura, e em função dos dados, pede-se:



a) o diagrama de corpo livre do carretel;

b) as equações de equilíbrio do carretel;

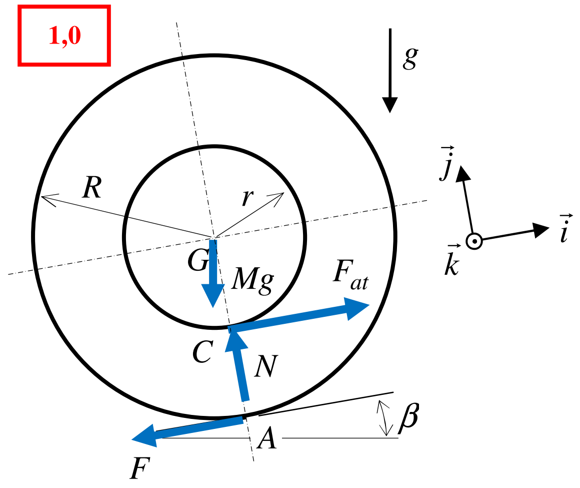
c) os valores da força F e da reação no ponto de contato C;

d) o valor máximo de β em função de μ para que haja o equilíbrio estático.

Solução

a) Diagrama de corpo livre:

1,0



b) Equações de equilíbrio do carretel:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{at} - F - Mg\,\text{sen}\beta = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - Mg\cos\beta = 0 \qquad (2)$$

$$\sum M_{Cz} = 0 \Rightarrow Mgr\,\text{sen}\beta - F(R-r) = 0 \qquad (3)$$

0,5

c) Resolvendo as equações de equilíbrio:

De (2): $\boxed{N = Mg\cos\beta}$ (4)

De (3): $\boxed{F = \dfrac{rMg\,\text{sen}\beta}{R-r}}$ (5)

Substituindo (5) em (1):

$$F_{at} = \left(\frac{r}{R-r}+1\right)Mg\,\text{sen}\beta = 0 \Rightarrow \boxed{F_{at} = \frac{RMg\,\text{sen}\beta}{R-r}} \qquad (6)$$

1,0

d) Para não escorregar: $F_{at} \le \mu N \underset{\text{usando (4) e (6)}}{\Rightarrow} \dfrac{RMg\,\text{sen}\beta}{R-r} \le \mu Mg\cos\beta$

$$\tan\beta \le \mu\left(\frac{R-r}{R}\right)$$

$$\boxed{\beta \le \arctan\left[\mu\left(\frac{R-r}{R}\right)\right]}$$

0,5

QUESTÃO 2 (3,5 pontos) – O disco de centro O e raio r gira em torno da peça OB com velocidade angular constante $\dot\theta = \omega_1$. O conjunto, por sua vez, gira em torno do eixo horizontal AC, com velocidade angular constante $\dot\phi = \omega_2$.

Considere a peça OB como o referencial móvel, ao qual é solidário o sistema cartesiano $Bxyz$.

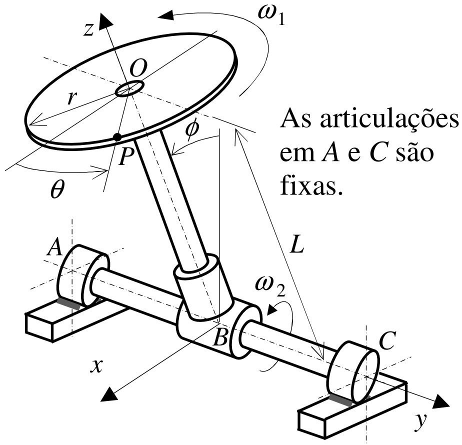
Na posição da figura, dada pelos ângulos (ϕ, θ), e expressando os resultados na base $(\vec i, \vec j, \vec k)$ associada ao sistema cartesiano, pede-se:

a) o vetor de rotação $\vec\omega$ do disco, indicando suas componentes de arrastamento $\vec\omega_a$ e relativa $\vec\omega_r$;

b) a velocidade $\vec v$ do ponto P, indicando suas componentes de arrastamento $\vec v_a$ e relativa $\vec v_r$;

c) a aceleração $\vec a$ do ponto P, indicando suas componentes de arrastamento $\vec a_a$, relativa $\vec a_r$ e complementar $\vec a_c$;

d) o vetor aceleração angular absoluta $\vec\alpha$ do disco de centro O.



Solução

a) A partir do enunciado:

$$\vec\omega_a = \dot\phi\vec j = \omega_2\vec j \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec\omega_a = \omega_2\vec j}$$

$$\vec\omega_r = \dot\theta\vec k = \omega_1\vec k \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec\omega_r = \omega_1\vec k}$$

Composição de movimento: $\vec\omega = \vec\omega_r + \vec\omega_a = \omega_1\vec k + \omega_2\vec j \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec\omega = \omega_2\vec j + \omega_1\vec k}$ **0,5**

b) Campo de velocidade para o movimento relativo do disco:

$$\vec v_r = \vec v_{O,r} + \omega_1\vec k \wedge (P-O) = \omega_1\vec k \wedge r(\cos\theta\vec i + \operatorname{sen}\theta\vec j) \Rightarrow \boxed{\vec v_r = \omega_1 r(-\operatorname{sen}\theta\vec i + \cos\theta\vec j)}$$ **0,5**

Campo de velocidade para o movimento de arrastamento do disco:

$$\vec v_a = \vec v_{B,a} + \omega_2\vec j \wedge (P-B) = \omega_2\vec j \wedge \left[r(\cos\theta\vec i + \operatorname{sen}\theta\vec j) + L\vec k\right] \Rightarrow \boxed{\vec v_a = \omega_2(L\vec i - r\cos\theta\vec k)}$$ **0,5**

Composição de movimento: $\vec v = \vec v_r + \vec v_a \Rightarrow \boxed{\vec v = (\omega_2 L - \omega_1 r\operatorname{sen}\theta)\vec i + \omega_1 r\cos\theta\vec j - \omega_2 r\cos\theta\vec k}$

c) Campo de aceleração para o movimento relativo do disco:

$$\vec a_r = \vec a_{O,r} + \underbrace{\dot\omega_1}_{0}\vec k \wedge (P-O) + \omega_1\vec k \wedge \left[\omega_1\vec k \wedge (P-O)\right] \Rightarrow \boxed{\vec a_r = -\omega_1^2 r(\cos\theta\vec i + \operatorname{sen}\theta\vec j)}$$ **0,5**

Campo de aceleração para o movimento de arrastamento do disco:

$$\vec a_a = \vec a_{B,a} + \underbrace{\dot\omega_2}_{0}\vec j \wedge (P-B) + \omega_2\vec j \wedge \left[\omega_2\vec j \wedge (P-B)\right] \Rightarrow \boxed{\vec a_a = -\omega_2^2(r\cos\theta\vec i + L\vec k)}$$ **0,5**

Aceleração complementar: $\vec a_c = 2\vec\omega_a \wedge \vec v_r = 2\omega_2\vec j \wedge \omega_1 r(-\operatorname{sen}\theta\vec i + \cos\theta\vec j) \Rightarrow \boxed{\vec a_c = 2\omega_2\omega_1 r\operatorname{sen}\theta\vec k}$ **0,5**

Composição de movimento: $\vec a = \vec a_r + \vec a_a + \vec a_c \Rightarrow \boxed{\vec a = -(\omega_1^2 + \omega_2^2)r\cos\theta\vec i - \omega_1^2 r\operatorname{sen}\theta\vec j + (2\omega_2\omega_1 r\operatorname{sen}\theta - \omega_2^2 L)\vec k}$

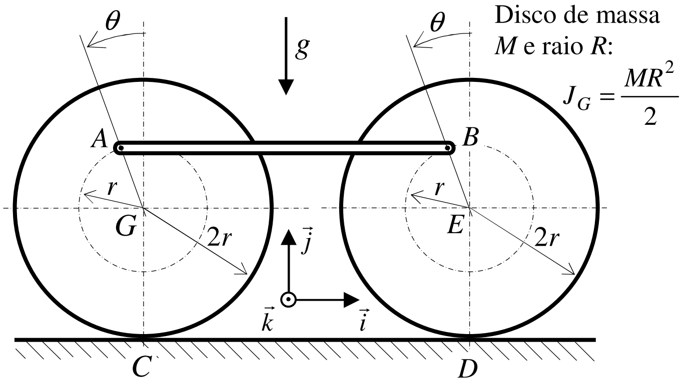
d) $$\vec\omega = \omega_2\vec j + \omega_1\vec k \underset{\text{derivando}}{\Rightarrow} \underbrace{\dot\omega_2\vec j}_{0} + \omega_2\dot{\vec j} + \underbrace{\dot\omega_1\vec k}_{0} + \omega_1\dot{\vec k} = \omega_2(\vec\omega_a \wedge \vec j) + \omega_1(\vec\omega_a \wedge \vec k) = \omega_2\underbrace{(\omega_2\vec j \wedge \vec j)}_{0} + \omega_1(\omega_2\vec j \wedge \vec k) \Rightarrow$$

$$\vec\alpha = \omega_1\omega_2\vec i$$

Ou, usando composição de movimento:

$$\vec\alpha = \vec\alpha_r + \vec\alpha_a + \vec\omega_a \wedge \vec\omega_r = \underbrace{\dot\omega_1\vec k}_{0} + \underbrace{\dot\omega_2\vec j}_{0} + \omega_2\vec j \wedge \omega_1\vec k \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec\alpha = \omega_1\omega_2\vec i}$$ **0,5**

QUESTÃO 3 (3,5 pontos) – Os discos homogêneos, cada um de massa m e raio $2r$, rolam sem escorregar em relação ao solo. A barra homogênea AB, de massa $2m$, é articulada nos discos nos pontos A e B, sem atrito. O sistema é abandonado do repouso na posição $\theta = 0$, e uma perturbação infinitesimal inicia o movimento. Pede-se, para o instante em que $\theta = \pi$:

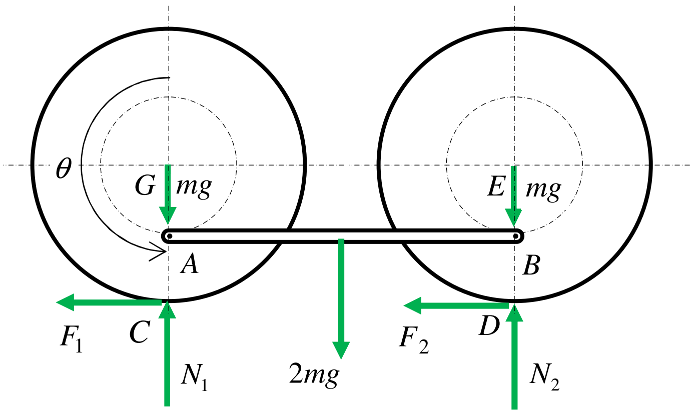


a) o vetor de rotação $\vec{\omega}$ dos discos;

b) o vetor aceleração angular $\vec{\alpha}$ dos discos e as forças que agem nas extremidades da barra AB.

Solução

Diagrama de corpo livre para $\theta = \pi$



a) As forças normais e as forças peso dos discos não realizam trabalho. Como não há escorregamento, as forças de atrito também não realizam trabalho. Dada as restrições geométricas, as forças internas também não realizam trabalho. Apenas o peso da barra AB realiza trabalho, e, observando que a cota vertical varia de $2r$:

$W_{\text{ext}} + W_{\text{int}} = W = 2mg\,2r = 4mgr$ **0,5**

Energia cinética do sistema:

Barra AB – observando que a barra está em translação, com velocidade igual à do ponto A, temos: $E_{AB} = \frac{1}{2}(2m)v_A^2$

O ponto C é o CIR do disco de centro G, portanto, $v_A = \omega r \quad \Rightarrow \quad E_{AB} = m\omega^2 r^2$ **0,5**

Discos – como não há escorregamento, os discos têm o mesmo movimento: $|\vec{v}_G|^2 = |\vec{v}_E|^2 = \omega^2 (2r)^2 = 4\omega^2 r^2$

$$E_{\text{Discos}} = 2\left[\frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}J_G\omega^2\right] = m\left(4\omega^2 r^2\right) + \frac{m(2r)^2}{2}\omega^2 \quad \Rightarrow \quad E_{\text{Discos}} = 6m\omega^2 r^2$$

Portanto: $E = E_{AB} + E_{\text{Discos}} \quad \Rightarrow \quad E = 7mr^2\omega^2$ **0,5**

Teorema da energia cinética: $E - E_0 = W$

Como parte do repouso, $E_0 = 0$: $7mr^2\omega^2 = 4mgr \Rightarrow \omega^2 = \frac{4g}{7r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\omega} = \sqrt{\frac{4g}{7r}}\,\vec{k}}$ **0,5**

b) A aceleração angular do disco e a aceleração do ponto A da barra estão relacionadas (o ponto A pertence ao disco e à barra). Para poder aplicar o Teorema da Resultante e o Teorema da Quantidade de Movimento Angular, é preciso obter essa relação. Denominando o vetor aceleração angular dos discos como $\vec{\alpha} = \alpha\vec{k}$ (sendo que α será calculado posteriormente):

Como não há escorregamento: $\vec{a}_G = \vec{a}_E = -2r\alpha\,\vec{i}$

Campo de acelerações para o disco de centro G:

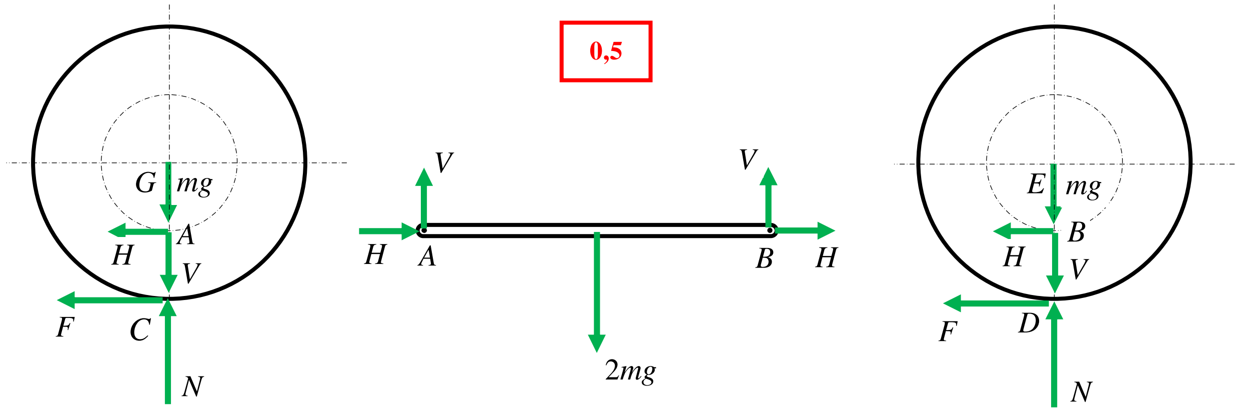
$$\vec{a}_A = \vec{a}_G + \vec{\alpha}\wedge(A-G) + \vec{\omega}\wedge[\vec{\omega}\wedge(A-G)] = -2r\alpha\vec{i} + \alpha\vec{k}\wedge(-r\,\vec{j}) + \sqrt{\frac{4g}{7r}}\,\vec{k}\wedge\left[\sqrt{\frac{4g}{7r}}\,\vec{k}\wedge(-r\,\vec{j})\right]$$

$$\vec{a}_A = -2r\alpha\vec{i} + \alpha r\vec{i} + \frac{4g}{7}\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_A = -\alpha r\vec{i} + \frac{4g}{7}\vec{j}$$

Observando que a barra *AB* tem movimento de translação, que os discos são idênticos entre si, e que também seus movimentos são os mesmos, conclui-se que as resultantes e momentos dos sistemas de forças em cada disco são iguais, e que as forças nas extremidades da barra *AB* são iguais entre si. Portanto:

Diagramas de corpo livre para $\theta = \pi$:

0,5



Para $\theta = \pi$:

Disco de centro *G* (essas equações são idênticas às do disco de centro *E*):

$\vec{a}_G = -2r\alpha\vec{i}$

Teorema da Resultante:

$$m(-2r\alpha) = -F - H \quad \Rightarrow \quad 2mr\alpha = F + H \qquad (1)$$

$$m0 = N - V - mg \quad \Rightarrow \quad N = V + mg \qquad (2)$$

Teorema da Quantidade de Movimento Angular:

$$J_G\alpha = -F2r + Hr \Rightarrow 2mr^2\alpha = -F2r + Hr \Rightarrow$$

$$2mr\alpha = -2F + H \qquad (3)$$

De (1) e (3) temos:

$F = 0$

$$2mr\alpha = H \qquad (6)$$

De (4) e (6) temos:

$\alpha = 0$

$H = 0$

Barra *AB* (translação)

$\vec{a}_A = -\alpha r\vec{i} + \dfrac{4g}{7}\vec{j}$

Teorema da Resultante:

$$2m(-\alpha r) = 2H \quad \Rightarrow \quad m\alpha r = H \qquad (4)$$

$$2m\frac{4g}{7} = 2V - 2mg \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{7}mg = V - mg \qquad (5)$$

De (5) temos:

$$V = \left(\frac{4}{7} + 1\right)mg \quad \Rightarrow \quad V = \frac{11}{7}mg$$

Substituindo em (2):

$$N = \frac{11}{7}mg + mg \quad \Rightarrow \quad N = \frac{18}{7}mg$$

Portanto, as forças que agem nas extremidades da barra para $\theta = \pi$ são:

$\boxed{H = 0}$ $\qquad$ $\boxed{V = \dfrac{11}{7}mg}$

E o vetor aceleração angular dos discos para $\theta = \pi$ é:

$\boxed{\vec{\alpha} = \vec{0}}$

Aplicação do Teorema da Resultante (para os três corpos rígidos) **0,5**

Aplicação do Teorema da Quantidade de Movimento Angular (para os três corpos rígidos) **0,5**