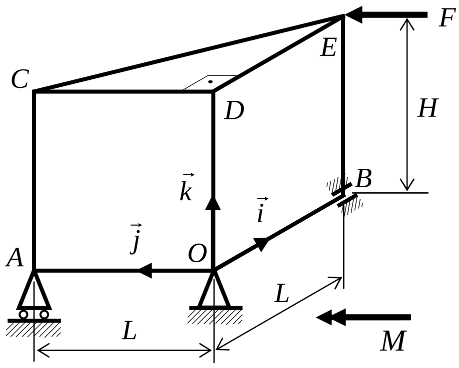
Mecânica I   PME 3100   Prova nº Rec.   Data 14 / 02 / 2017

Duração da Prova: 110 minutos

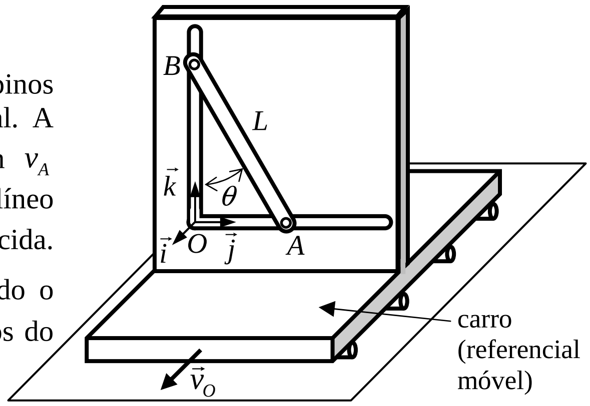
- **Não é permitido o porte de calculadoras, "tablets", celulares e dispositivos similares.**
- **Após o início da distribuição do enunciado da prova, é proibido sair da sala antes das 08:30.**
- **A partir do momento em que a prova for encerrada, não é permitido ao aluno continuar escrevendo na folha de respostas, havendo possibilidade de anulação da respectiva prova se isto ocorrer.**

Questão 1 (3,0 pontos): O triângulo isósceles e retângulo *CDE*, de catetos de comprimento *L*, forma o topo de um prisma reto, homogêneo, de altura *H* e massa *m*. No vértice *A* temos um apoio simples, cujo plano é $O\vec{i}\,\vec{j}$, em *O* temos uma articulação simples, e em *B* temos um anel curto, cujo eixo é paralelo ao versor $\vec{i}$. Neste prisma é aplicado um binário de momento $\vec{M} = M\,\vec{j}$, e em *E* é aplicada uma força $\vec{F} = F\,\vec{j}$.



a) Desenhe o diagrama de corpo livre do prisma. Observe que o sistema **<u>não</u>** está sujeito à aceleração da gravidade.
b) Escreva as equações de equilíbrio e calcule as reações vinculares.
c) Determine as coordenadas do centro de massa *G* do prisma.

Questão 2 (3,5 pontos): A barra *AB*, de comprimento *L*, possui pinos nas extremidades que percorrem os rasgos vertical e horizontal. A velocidade do ponto *A* em relação ao carro é $\vec{v}_A = v_A\,\vec{j}$, com v_A constante e conhecida. O carro, por sua vez, tem movimento retilíneo e uniforme, com velocidade $\vec{v}_O = v_O\,\vec{i}$, com v_O constante e conhecida. O sistema de coordenadas $O\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}$ é fixo no carro. Considerando o carro como referencial móvel, e em função de θ e demais dados do sistema:

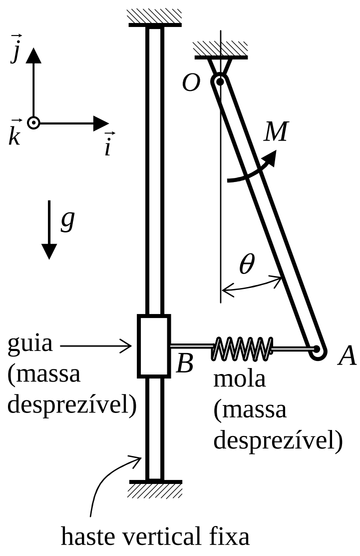


a) Considerando apenas o movimento relativo, determine graficamente o *CIR* da barra *AB* e calcule o vetor de rotação relativo da barra *AB* ($\vec{\omega}_{rel}$).

b) Calcule a velocidade absoluta do ponto *A* da barra *AB* ($\vec{v}_{A,abs}$) e o vetor rotação absoluto da barra *AB* ($\vec{\omega}_{abs}$).

c) Calcule a aceleração de Coriolis do ponto *B* da barra *AB* ($\vec{a}_{B,Cor}$).

d) Para a barra *AB*, determine a velocidade mínima $\vec{v}_E$ e localize o eixo helicoidal instantâneo $(E - O)$.



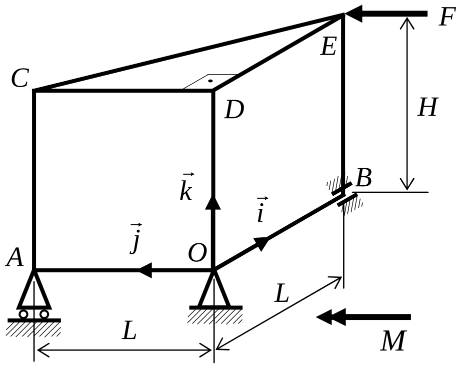
Questão 3 (3,5 pontos): No sistema plano mostrado na figura, a barra *OA* tem comprimento *L* e massa *m*. A extremidade *A* da barra está presa a uma mola de constante elástica *k*. A outra extremidade da mola está presa a uma guia em *B* que desliza sem atrito ao longo de uma haste vertical, de forma que a mola *AB* permanece na horizontal. O sistema encontra-se inicialmente em repouso com $\theta = 0$ e sem deformação da mola. Em um dado instante, aplica-se à barra *OA* um binário de momento $\vec{M} = M\vec{k}$, com *M* conhecido e constante. Sabendo-se que o binário permanece aplicado, e considerando-se o intervalo de tempo entre o instante inicial e a máxima deformação da mola, pede-se:
a) A energia cinética do sistema em função do vetor de rotação $\vec{\omega}$ da barra *OA*.
b) O vetor de rotação $\vec{\omega}$ da barra *OA* em função do ângulo θ.
c) As reações da articulação aplicadas no ponto *O* da barra *OA* para o instante imediatamente após a aplicação do binário de momento $\vec{M}$.

Dado: para a barra, temos que $J_{Oz} = \dfrac{mL^2}{3}$

GABARITO

Questão 1 (3,0 pontos): O triângulo isósceles e retângulo *CDE*, de catetos de comprimento *L*, forma o topo de um prisma reto, homogêneo, de altura *H* e massa *m*. No vértice *A* temos um apoio simples, cujo plano é $O\vec{i}\,\vec{j}$, em *O* temos uma articulação simples, e em *B* temos um anel curto, cujo eixo é paralelo ao versor $\vec{i}$. Neste prisma é aplicado um binário de momento $\vec{M} = M\,\vec{j}$, e em *E* é aplicada uma força $\vec{F} = F\,\vec{j}$.

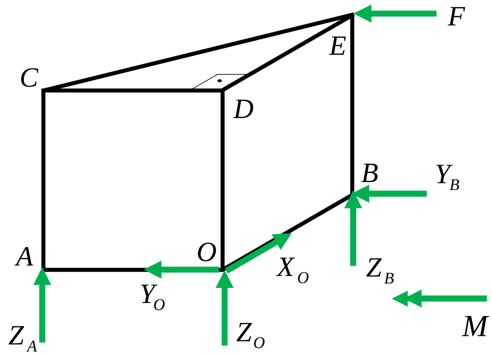
a) Desenhe o diagrama de corpo livre do prisma. Observe que o sistema **não** está sujeito à aceleração da gravidade.
b) Escreva as equações de equilíbrio e calcule as reações vinculares.
c) Determine as coordenadas do centro de massa *G* do prisma.



Solução

a) Diagrama de corpo livre:

1,0



b) Equações de equilíbrio:

$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{X_O = 0}$ (1)

$\sum F_y = 0 \Rightarrow Y_B + Y_O + F = 0$ (2) **0,5**

$\sum F_z = 0 \Rightarrow Z_A + Z_B + Z_O = 0$ (3)

0,5
(resultados)

Escolhendo o polo *O*:

$\sum M_{Ox} = 0 \Rightarrow Z_A L - FH = 0 \Rightarrow \boxed{Z_A = \frac{FH}{L}}$ (4)

$\sum M_{Oy} = 0 \Rightarrow -Z_B L + M = 0 \Rightarrow \boxed{Z_B = \frac{M}{L}}$ (5) **0,5**

$\sum M_{Oz} = 0 \Rightarrow Y_B L + FL = 0 \Rightarrow \boxed{Y_B = -F}$ (6)

Substituindo (6) em (2):

$-F + Y_O + F = 0 \Rightarrow \boxed{Y_O = 0}$

Substituindo (5) e (4) em (3):

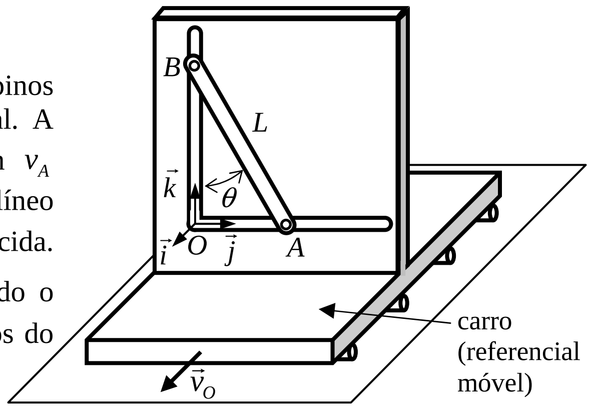
$\frac{FH}{L} + \frac{M}{L} + Z_O = 0 \Rightarrow \boxed{Z_O = -\frac{M + FH}{L}}$

c) Sendo um prisma reto, as coordenadas *x* e *y* de seu centro de massa coincidem com as coordenadas do centro de massa da figura plana que compõe a base (triângulo: 1/3 da altura) e pela simetria, a coordenada *z* está a meia altura da base:

$\boxed{G - O = \frac{L}{3}\vec{i} + \frac{L}{3}\vec{j} + \frac{H}{2}\vec{k}}$ **0,5**

GABARITO

Questão 2 (3,5 pontos): A barra *AB*, de comprimento *L*, possui pinos nas extremidades que percorrem os rasgos vertical e horizontal. A velocidade do ponto *A* em relação ao carro é $\vec{v}_A = v_A\vec{j}$, com v_A constante e conhecida. O carro, por sua vez, tem movimento retilíneo e uniforme, com velocidade $\vec{v}_O = v_O\vec{i}$, com v_O constante e conhecida. O sistema de coordenadas $O\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}$ é fixo no carro. Considerando o carro como referencial móvel, e em função de θ e demais dados do sistema:



a) Considerando apenas o movimento relativo, determine graficamente o *CIR* da barra *AB* e calcule o vetor de rotação relativo da barra *AB* ($\vec{\omega}_{rel}$).

b) Calcule a velocidade absoluta do ponto *A* da barra *AB* ($\vec{v}_{A,abs}$) e o vetor rotação absoluto da barra *AB* ($\vec{\omega}_{abs}$).

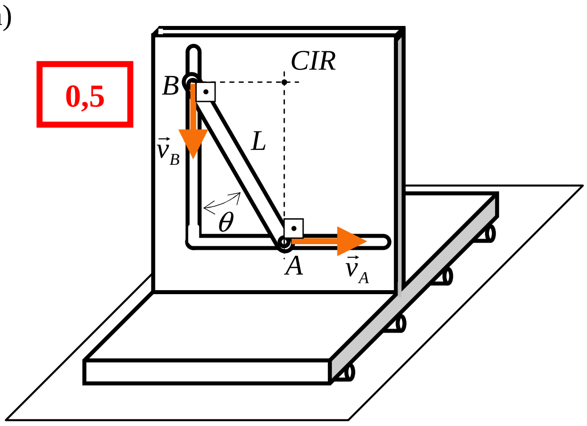
c) Calcule a aceleração de Coriolis do ponto *B* da barra *AB* ($\vec{a}_{B,Cor}$).

d) Para a barra *AB*, determine a velocidade mínima $\vec{v}_E$ e localize o eixo helicoidal instantâneo $(E-O)$.

Solução:

a)

0,5



Usando o *CIR*:

$$|\vec{v}_A| = |CIR - A| \cdot |\vec{\omega}_{rel}| \;\Rightarrow\; \omega_{rel} = \frac{v_A}{L\cos\theta}$$

$$\boxed{\vec{\omega}_{rel} = \frac{v_A}{L\cos\theta}\vec{i}}$$ **0,5**

b) O movimento de arrastamento é o do carro:

$$\vec{v}_{A,abs} = \vec{v}_{A,rel} + \vec{v}_{A,arr} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{A,abs} = v_A\vec{j} + v_O\vec{i}}$$ **0,5**

O vetor de rotação do carro é nulo:

$$\vec{\omega}_{abs} = \vec{\omega}_{rel} + \vec{\omega}_{arr} = \frac{v_A}{L\cos\theta}\vec{i} + \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{\omega}_{abs} = \frac{v_A}{L\cos\theta}\vec{i}}$$ **0,5**

c) $\vec{a}_{B,Cor} = 2\vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{v}_{B,rel} = 2 \cdot \vec{0} \wedge \vec{v}_{B,rel} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{B,Cor} = \vec{0}}$ **0,5**

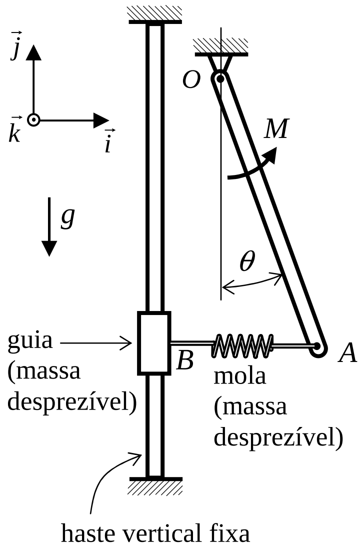
d) Como o referencial móvel está em translação, a velocidade de arrastamento é a mesma para todos os pontos da barra *AB*. Logo, o ponto de menor velocidade absoluta será o ponto de menor velocidade relativa, que é o *CIR* do movimento relativo:

$\vec{v}_E = \vec{v}_{E,rel} + \vec{v}_{E,arr} = \vec{0} + \vec{v}_O \Rightarrow \boxed{\vec{v}_E = v_O\vec{i}}$ **0,5**

O eixo helicoidal instantâneo contém o *CIR* do movimento relativo e é paralelo ao vetor de rotação:

$\boxed{E - O = L\sin\theta\,\vec{j} + L\cos\theta\,\vec{k} + \lambda\vec{i}}$ **0,5**

GABARITO



Questão 3 (3,5 pontos): No sistema plano mostrado na figura, a barra *OA* tem comprimento *L* e massa *m*. A extremidade *A* da barra está presa a uma mola de constante elástica *k*. A outra extremidade da mola está presa a uma guia em *B* que desliza sem atrito ao longo de uma haste vertical, de forma que a mola *AB* permanece na horizontal. O sistema encontra-se inicialmente em repouso com $\theta = 0$ e sem deformação da mola. Em um dado instante, aplica-se à barra *OA* um binário de momento $\vec{M} = M\vec{k}$, com *M* conhecido e constante. Sabendo-se que o binário permanece aplicado, e considerando-se o intervalo de tempo entre o instante inicial e a máxima deformação da mola, pede-se:

a) A energia cinética do sistema em função do vetor de rotação $\vec{\omega}$ da barra *OA*.

b) O vetor de rotação $\vec{\omega}$ da barra *OA* em função do ângulo θ.

c) As reações da articulação aplicadas no ponto *O* da barra *OA* para o instante imediatamente após a aplicação do binário de momento $\vec{M}$.

Dado: para a barra, temos que $J_{Oz} = \dfrac{mL^2}{3}$

Solução

a) Energia cinética de corpo rígido: $E = \frac{1}{2} m\vec{v}_O \cdot \vec{v}_O + m\vec{v}_O \cdot \vec{\omega} \wedge (G-O) + \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \mathbf{I}_O \vec{\omega}$

O ponto *O* é fixo, portanto: $E = \frac{1}{2} m\underbrace{\vec{v}_O \cdot \vec{v}_O}_{0} + m\underbrace{\vec{v}_O}_{\vec{0}} \cdot \vec{\omega} \wedge (G-O) + \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \mathbf{I}_O \vec{\omega} \Rightarrow E = \frac{1}{2} J_{Oz}\omega^2$, sendo que $J_{Oz} = \dfrac{mL^2}{3}$

Resultando em: $\boxed{E = \dfrac{mL^2}{6}\omega^2}$ **0,5**

b) Trabalho do binário: $W_M = M\theta$

Trabalho da força peso: $W_P = -mg\left(\dfrac{L}{2} - \dfrac{L}{2}\cos\theta\right)$

Trabalho da força elástica: $W_E = -\dfrac{1}{2}k(L\sin\theta)^2$

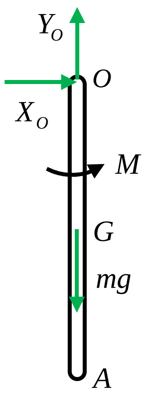
1,0

Teorema da energia cinética:

0,5 $E_f - E_i = W_{EXT} \underset{\text{parte do repouso}}{\Rightarrow} \dfrac{mL^2}{6}\omega^2 = M\theta - mg\left(\dfrac{L}{2} - \dfrac{L}{2}\cos\theta\right) - \dfrac{1}{2}k(L\sin\theta)^2$

$$\boxed{\vec{\omega} = \sqrt{\frac{6}{mL^2}\left[M\theta - mg\left(\frac{L}{2} - \frac{L}{2}\cos\theta\right) - \frac{1}{2}k(L\sin\theta)^2\right]}\,\vec{k}}$$ **0,5**

c) Imediatamente após a aplicação do binário temos o seguinte diagrama de corpo livre - barra *OA*:



TQMA, polo *O* (observando que o ponto *O* é fixo): $\dfrac{d(\mathbf{I}_O\vec{\omega})}{dt} + m(G-O) \wedge \underbrace{\vec{a}_O}_{\vec{0}} = \vec{M}_{O,EXT}$

Considerando ainda que é movimento plano: $J_{Oz}\alpha = M \Rightarrow \dfrac{mL^2}{3}\alpha = M \Rightarrow \alpha = \dfrac{3M}{mL^2}$ **0,4**

Cinemática: $\vec{a}_G = \vec{a}_O + \vec{\alpha} \wedge (G-O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G-O)]$

Observando que o ponto *O* é fixo e que a barra parte do repouso: $\vec{a}_G = \vec{\alpha} \wedge (G-O)$

$\vec{a}_G = \dfrac{3M}{mL^2}\vec{k} \wedge \dfrac{L}{2}(-\vec{j}) \Rightarrow \vec{a}_G = \dfrac{3M}{2mL}\vec{i}$ **0,3**

Teorema da resultante:

$m\vec{a}_G = \sum_i \vec{F}_{EXT,i} \Rightarrow m\dfrac{3M}{2mL}\vec{i} = X_O\vec{i} + (Y_O - mg)\vec{j} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} X_O = \dfrac{3M}{2L} \\ Y_O = mg \end{cases}}$ **0,3**