ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 – MECÂNICA I – RECUPERAÇÃO – 02 de fevereiro de 2016

Duração da Prova: 110 minutos

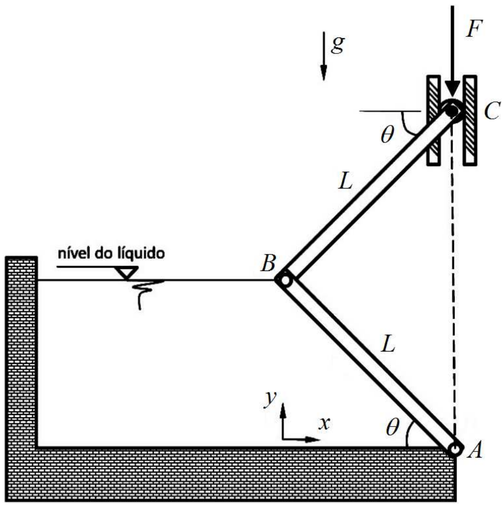
- **Não é permitido o uso de dispositivos eletrônicos, como calculadoras, "tablets" e celulares.**
- **Após o início da distribuição do enunciado da prova, é proibido sair da sala antes das 08:30.**
- **A partir do momento em que a prova for encerrada, não é permitido ao aluno escrever mais nada na folha de respostas, havendo possibilidade de anulação da respectiva prova se isto ocorrer.**

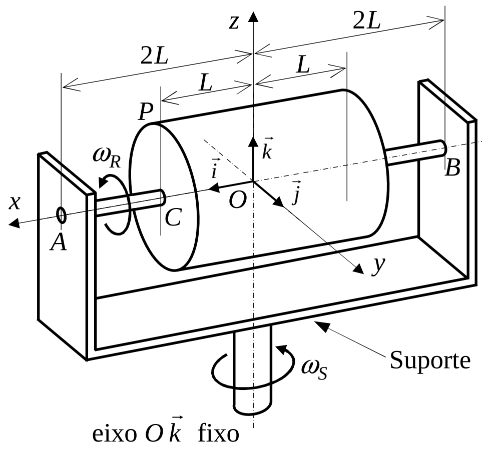
Questão 1 (3,0 pontos) A figura mostra o corte transversal de um reservatório no qual um líquido de densidade ρ é mantido. O nível do líquido é ajustado por meio de um mecanismo formado pelas placas homogêneas AB e BC, ambas de massa m e comprimento L, unidas por uma articulação ideal em B. Em A existe uma articulação ideal fixa ao reservatório. Em C há um rolete que pode deslizar sem atrito no interior da guia vertical. Na situação mostrada, o sistema é mantido em equilíbrio por meio da aplicação de uma força externa F (desconhecida). Considere que a largura (dimensão perpendicular ao plano da folha) é unitária e que $\theta = \pi/3$ radianos. Nessas condições, pedem-se:

(a) o módulo R, a direção e o sentido da resultante das forças de pressão do líquido sobre a placa AB, bem como a distância entre seu ponto de aplicação na seção transversal e o ponto B;

(b) os diagramas de corpo livre das placas AB e BC;

(c) em função dos parâmetros fornecidos e de R, obter as componentes das reações vinculares em A, em C e a força externa F.





Questão 2 (3,5 pontos) Um rotor é formado por um eixo de comprimento $4L$ e por um cilindro de raio R e comprimento $2L$. O rotor tem velocidade angular ω_R constante em relação ao suporte. O suporte, por sua vez, tem velocidade angular ω_S constante em relação a um referencial fixo. Usando o suporte como referencial móvel, e, para o instante correspondente à posição ilustrada na figura, em que $(P-C)//Oz$, determine (use o sistema $O\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}$ solidário ao suporte):

(a) O vetor rotação relativa $\vec{\omega}_{rel}$, o vetor rotação de arrastamento $\vec{\omega}_{arr}$ e o vetor rotação absoluta $\vec{\omega}_{abs}$ do rotor.

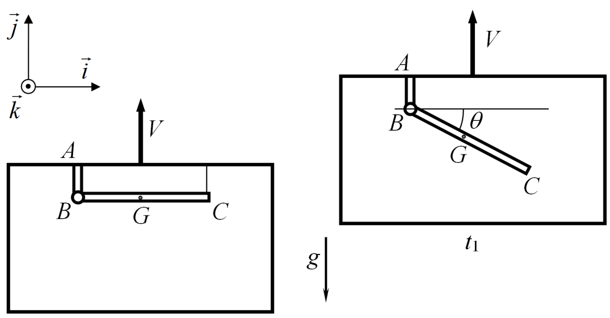
(b) O vetor aceleração angular absoluta $\vec{\alpha}_{abs}$ do rotor.

(c) A aceleração relativa $\vec{a}_{P,rel}$, a aceleração de arrastamento $\vec{a}_{P,arr}$ e a aceleração de Coriolis $\vec{a}_{P,Cor}$ do ponto P.

(d) A relação entre ω_R e ω_S para que a velocidade absoluta $\vec{v}_{P,abs}$ do ponto P seja mínima em módulo. Nessa condição, localize o eixo helicoidal instantâneo.

Questão 3 (3,5 pontos) O sistema mostrado na figura é composto por uma barra vertical AB, de massa desprezível, articulada a uma barra BC, de massa m e comprimento L. A extremidade C da barra BC encontra-se inicialmente suportada por um fio ideal. O sistema está dentro de um elevador, que sobe com velocidade constante $\vec{V} = V\vec{j}$. Em um dado instante t_0, o fio se rompe.

Sabendo que em um instante posterior, $t_1 > t_0$, a barra terá vetor de rotação $\vec{\omega} = -\dot{\theta}\vec{k}$ e formará um ângulo θ em relação à horizontal, pede-se:



(a) O diagrama de corpo livre da barra no instante t_1,

(b) A aceleração angular $\vec{\alpha}$ da barra no instante t_1,

(c) O trabalho total das forças externas sobre a barra entre t_0 e t_1, em função de V, θ e $\dot{\theta}$.

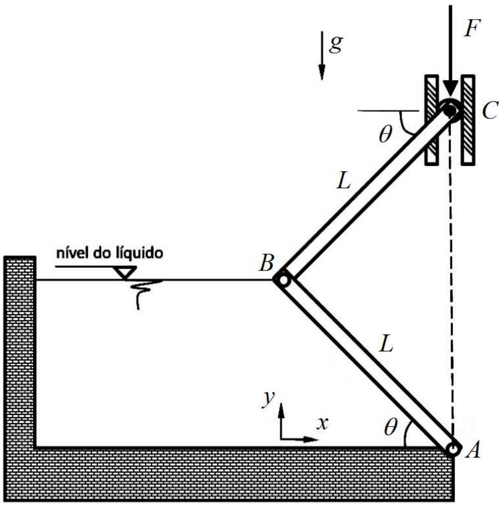
GABARITO

Questão 1 (3,0 pontos) A figura mostra o corte transversal de um reservatório no qual um líquido de densidade ρ é mantido. O nível do líquido é ajustado por meio de um mecanismo formado pelas placas homogêneas *AB* e *BC*, ambas de massa *m* e comprimento *L*, unidas por uma articulação ideal em *B*. Em *A* existe uma articulação ideal fixa ao reservatório. Em *C* há um rolete que pode deslizar sem atrito no interior da guia vertical. Na situação mostrada, o sistema é mantido em equilíbrio por meio da aplicação de uma força externa *F* (desconhecida). Considere que a largura (dimensão perpendicular ao plano da folha) é unitária e que $\theta = \pi/3$ radianos. Nessas condições, pedem-se:

(a) o módulo *R*, a direção e o sentido da resultante das forças de pressão do líquido sobre a placa *AB*, bem como a distância entre seu ponto de aplicação na seção transversal e o ponto *B*;

(b) os diagramas de corpo livre das placas *AB* e *BC*;

(c) em função dos parâmetros fornecidos e de *R*, obter as componentes das reações vinculares em *A*, em *C* e a força externa *F*.



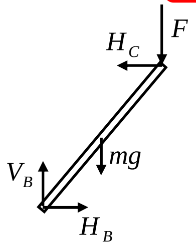
Solução:

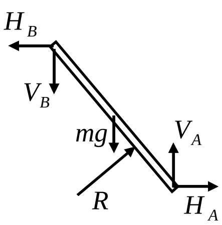
(a) Resultante das forças de pressão do líquido sobre a placa

$R = \left(\frac{1}{2}\rho g L\text{sen}\theta \cdot L\right) \cdot 1 \Rightarrow \boxed{R = \frac{\sqrt{3}}{4}\rho g L^2}$ (aplicada perpendicularmente à placa *AB*, a $\frac{2L}{3}$ de distância de *B*)

0,5 0,5

(b) 1,0





(c) Utilizando o DCL acima, escrevem-se as equações de equilíbrio para as duas placas:

Placa *AB*

$\sum F_x = 0 \Rightarrow -H_B + H_A + R\text{sen}\theta = 0$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V_B - mg + V_A + R\cos\theta = 0$

$\sum M_A = 0 \Rightarrow L\text{sen}\theta \cdot H_B + L\cos\theta \cdot V_B - \frac{L}{3}R + \frac{mgL}{2}\cos\theta = 0$

$\Rightarrow -H_B + H_A + R\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$ (1)

$\Rightarrow -V_B - mg + V_A + R\frac{1}{2} = 0$ (2)

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}H_B + \frac{1}{2}V_B - \frac{R}{3} + \frac{mg}{4} = 0$ (3)

Placa *BC*

$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_B - H_C = 0$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_B - mg - F = 0$

$\sum M_C = 0 \Rightarrow \frac{mgL}{2}\cos\theta - L\cos\theta \cdot V_B + L\text{sen}\theta \cdot H_B = 0$

$\Rightarrow H_B = H_C$ (4)

$\Rightarrow V_B - mg - F = 0$ (5)

$\Rightarrow \frac{mg}{4} - \frac{1}{2}V_B + \frac{\sqrt{3}}{2}H_B = 0$ (6)

0,5

De (3) e (6) obtém-se:

$\boxed{H_B = \frac{-3mg + 2R}{6\sqrt{3}}}$ e $\boxed{V_B = \frac{R}{3}}$, substituindo:

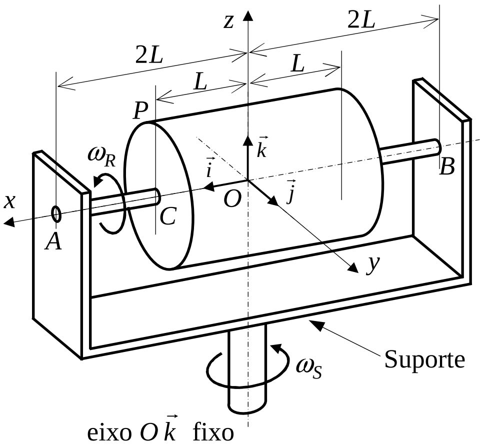
Em (4): $\Rightarrow \boxed{H_C = \frac{-3mg + 2R}{6\sqrt{3}}}$

Em (2): $\Rightarrow -\frac{R}{3} - mg + V_A + \frac{R}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{V_A = mg - \frac{R}{6}}$

Em (5): $\Rightarrow \frac{R}{3} - mg - F = 0 \Rightarrow \boxed{F = -mg + \frac{R}{3}}$

Em (1): $\Rightarrow \frac{3mg - 2R}{6\sqrt{3}} + H_A + R\frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{H_A = \frac{-3mg - 7R}{6\sqrt{3}}}$

0,5



Questão 2 (3,5 pontos) Um rotor é formado por um eixo de comprimento 4*L* e por um cilindro de raio *R* e comprimento 2*L*. O rotor tem velocidade angular ω_R constante em relação ao suporte. O suporte, por sua vez, tem velocidade angular ω_S constante em relação a um referencial fixo. Usando o suporte como referencial móvel, e, para o instante correspondente à posição ilustrada na figura, em que $(P-C)//Oz$, determine (use o sistema $O\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}$ solidário ao suporte):

(a) O vetor rotação relativa $\vec{\omega}_{rel}$, o vetor rotação de arrastamento $\vec{\omega}_{arr}$ e o vetor rotação absoluta $\vec{\omega}_{abs}$ do rotor.

(b) O vetor aceleração angular absoluta $\vec{\alpha}_{abs}$ do rotor.

(c) A aceleração relativa $\vec{a}_{P,rel}$, a aceleração de arrastamento $\vec{a}_{P,arr}$ e a aceleração de Coriolis $\vec{a}_{P,Cor}$ do ponto *P*.

(d) A relação entre ω_R e ω_S para que a velocidade absoluta $\vec{v}_{P,abs}$ do ponto *P* seja mínima em módulo. Nessa condição, localize o eixo helicoidal instantâneo.

Solução

a) **0,5**

$$\vec{\omega}_{rel} = \omega_R\,\vec{i}$$

$$\vec{\omega}_{arr} = \omega_S\,\vec{k}$$

$$\vec{\omega}_{abs} = \vec{\omega}_{rel} + \vec{\omega}_{arr} \Rightarrow \boxed{\vec{\omega}_{abs} = \omega_R\,\vec{i} + \omega_S\,\vec{k}}$$

b)

$$\vec{\alpha}_{abs} = \vec{\alpha}_{rel} + \vec{\alpha}_{arr} + \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{\omega}_{rel} = \vec{0} + \vec{0} + \omega_S\,\vec{k} \wedge \omega_R\,\vec{i} \Rightarrow \boxed{\vec{\alpha}_{abs} = \omega_S\omega_R\,\vec{j}}$$ **0,5**

c)

$$\vec{a}_{P,rel} = \vec{a}_{C,rel} + \vec{\alpha}_{rel} \wedge (P-C) + \vec{\omega}_{rel} \wedge [\vec{\omega}_{rel} \wedge (P-C)] = \vec{0} + \vec{0} + \omega_R\,\vec{i} \wedge (\omega_R\,\vec{i} \wedge R\,\vec{k}) \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{P,rel} = -\omega_R^2\,R\,\vec{k}}$$ **0,5**

$$\vec{a}_{P,arr} = \vec{a}_{O,arr} + \vec{\alpha}_{arr} \wedge (P-O) + \vec{\omega}_{arr} \wedge [\vec{\omega}_{arr} \wedge (P-O)] = \vec{0} + \vec{0} + \omega_S\,\vec{k} \wedge [\omega_S\,\vec{k} \wedge (L\,\vec{i} + R\,\vec{k})] \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{P,arr} = -\omega_S^2\,L\vec{i}}$$ **0,5**

$$\vec{a}_{P,Cor} = 2\vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{v}_{P,rel} = 2\omega_S\,\vec{k} \wedge (-\omega_R R\,\vec{j}) \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{P,Cor} = 2\omega_S\omega_R R\,\vec{i}}$$ **0,5**

d)

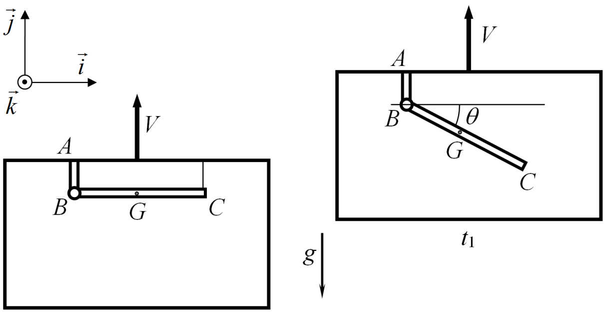
$$\vec{v}_{P,abs} = \vec{v}_O + \vec{\omega}_{abs} \wedge (P-O) = \vec{0} + (\omega_R\,\vec{i} + \omega_S\,\vec{k}) \wedge (L\,\vec{i} + R\,\vec{k}) = \omega_S L\,\vec{j} - \omega_R R\,\vec{j} \Rightarrow \vec{v}_{P,abs} = (\omega_S L - \omega_R R)\vec{j}$$

$\Rightarrow |\vec{v}_{P,abs}| = |\omega_S L - \omega_R R|$, que pode ser anulado, resultando em $\vec{v}_{P,abs,mín} = \vec{0}$.

$$\omega_S L - \omega_R R = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\omega_S}{\omega_R} = \frac{R}{L}}$$ **0,5**

Como $\vec{v}_{P,abs,mín} = \vec{0}$ nessa condição, o ponto *P* pertence ao eixo helicoidal instantâneo. Como $\vec{v}_O = \vec{0}$, o eixo helicoidal instantâneo é a reta que contem o segmento $\overline{PO}$, ou seja, $\boxed{E - O = \lambda(L\,\vec{i} + R\,\vec{k})}$ **0,5**

Questão 3 (3,5 pontos) O sistema mostrado na figura é composto por uma barra vertical *AB*, de massa desprezível, articulada a uma barra *BC*, de massa *m* e comprimento *L*. A extremidade *C* da barra *BC* encontra-se inicialmente suportada por um fio ideal. O sistema está dentro de um elevador, que sobe com velocidade constante $\vec{V} = V\,\vec{j}$. Em um dado instante t_0, o fio se rompe.



Sabendo que em um instante posterior, $t_1 > t_0$, a barra terá vetor de rotação $\vec{\omega} = -\dot{\theta}\vec{k}$ e formará um ângulo θ em relação à horizontal, pede-se:

(a) O diagrama de corpo livre da barra no instante t_1,

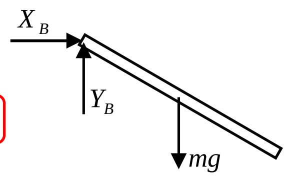
(b) A aceleração angular $\vec{\alpha}$ da barra no instante t_1,

(c) O trabalho total das forças externas sobre a barra entre t_0 e t_1, em função de V, θ e $\dot{\theta}$.

Solução:

(a) O diagrama de corpo livre da barra no instante t_1:

0,5



(b) Teorema da quantidade de movimento angular, polo *B*

$$\frac{d}{dt}\left([I_B]\{\omega\}\right) + m(G-B)\wedge\vec{a}_B = \vec{M}_B\text{, em que } \vec{a}_B = \vec{0}$$ **0,5**

$$\Rightarrow J_{z_B}\alpha\,\vec{k} = \vec{M}_B \Rightarrow \frac{mL^2\alpha}{3} = -mg\frac{L}{2}\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\frac{3g}{2L}\cos\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\alpha} = -\frac{3g}{2L}\cos\theta\,\vec{k}}$$ **1,0**

(c) $W = E_1 - E_0$ **0,5**

$$E_0 = \frac{mV^2}{2}$$ **0,5**

Tomando-se o centro de massa *G*,

$$\vec{V}_G = \vec{V}_B + \vec{\omega}\wedge(G-B) \quad \Rightarrow \quad \vec{V}_G = V\,\vec{j} - \dot{\theta}\,\vec{k}\wedge\left(\frac{L}{2}\cos\theta\,\vec{i} - \frac{L}{2}sen\theta\,\vec{j}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{V}_G = -\dot{\theta}\frac{L}{2}sen\theta\,\vec{i} + \left(V - \frac{L}{2}\dot{\theta}\cos\theta\right)\vec{j}$$

$$E_1 = \frac{mV_G^{\,2}}{2} + \frac{1}{2}\{\omega\}^t[I_G]\{\omega\}$$

$$\Rightarrow E_1 = \frac{m}{2}\left(\dot{\theta}^2\frac{L^2}{4}sen^2\theta + V^2 - V\dot{\theta}L\cos\theta + \dot{\theta}^2\frac{L^2}{4}\cos^2\theta\right) + \frac{1}{2}\frac{mL^2}{12}\dot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow E_1 = \frac{mV^2}{2} - \frac{mV\dot{\theta}L\cos\theta}{2} + \frac{mL^2}{6}\dot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow \boxed{W = \frac{mL^2}{6}\dot{\theta}^2 - \frac{mV\dot{\theta}L\cos\theta}{2}}$$ **0,5**