ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231 CEP 05508-970, São Paulo, SP
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

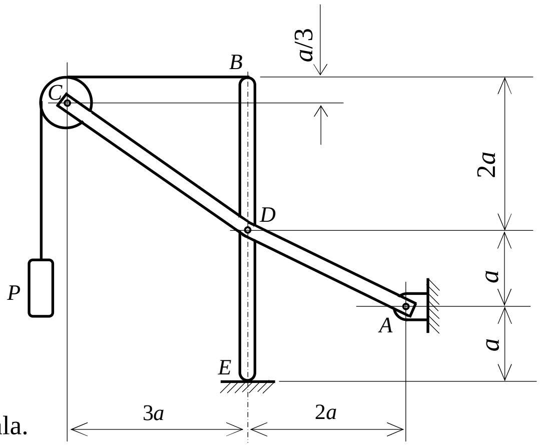
Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 – MECÂNICA I – Recuperação – 10 de fevereiro de 2015

Duração da Prova: 110 minutos

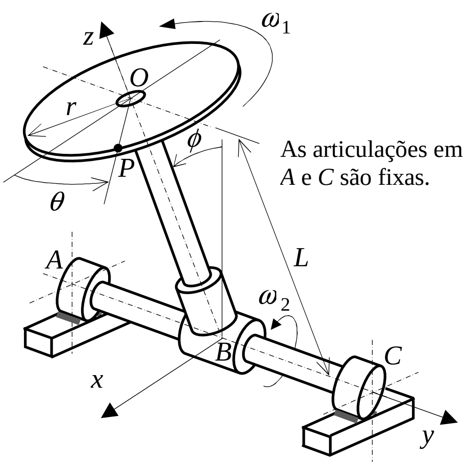
- **Não é permitido o uso de dispositivos eletrônicos, como calculadoras, "tablets" e celulares.**
- **A partir do momento em que a Prova for encerrada, não é permitido ao aluno escrever mais nada na folha de respostas, havendo possibilidade de anulação da respectiva prova se isto ocorrer.**

Questão 1 (3,0 pontos): A estrutura ao lado é formada pelas barras *AC* e *BE*, ambas contínuas, de peso desprezível, e unidas por um pino em *D*. Por uma articulação em *C* acopla-se uma polia ideal sobre a qual se enrola um cabo também ideal, o qual é preso ao ponto *B* e sustenta uma carga de peso *P*. São dadas as dimensões indicadas na figura. Sabe-se que em *E* a barra *BE* faz contato com uma superfície rugosa cujo coeficiente de atrito μ (desconhecido) é capaz de manter o sistema em equilíbrio. Pede-se:
(a) os diagramas de corpo livre das barras e da polia;
(b) a reação vincular em *A*;
(c) o mínimo valor do coeficiente de atrito μ compatível com a situação proposta.

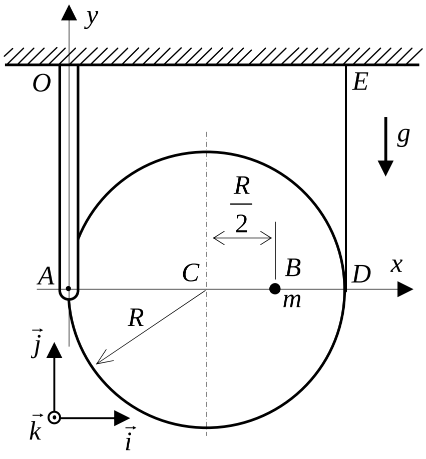


Obs.: desenho fora de escala.

Questão 2 (3,5 pontos): O disco de centro *O* e raio *r* gira em torno da peça *OB* com velocidade angular constante $\omega_1 = \dot{\theta}$. O conjunto, por sua vez, gira em torno do eixo horizontal *AC*, com velocidade angular constante $\omega_2 = \dot{\phi}$.
Considere a peça *OB* como o referencial móvel, ao qual é solidário o sistema cartesiano *Bxyz*.
Na posição da figura, dada pelos ângulos (ϕ, θ), e expressando os resultados na base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ associada ao sistema cartesiano, pede-se:
(a) o vetor de rotação $\vec{\Omega}_a$ da peça *OB* e o vetor de rotação $\vec{\Omega}_D$ do disco;
(b) a velocidade $\vec{v}$ do ponto *P*, indicando suas componentes de arrastamento $\vec{v}_a$ e relativa $\vec{v}_r$;
(c) A aceleração $\vec{a}$ do ponto *P*, indicando suas componentes de arrastamento $\vec{a}_a$, relativa $\vec{a}_r$ e complementar $\vec{a}_c$;
(d) o vetor aceleração angular absoluta $\vec{\alpha}_D$ do disco de centro *O*.



Questão 3 (3,5 pontos): No sistema mostrado na figura, o disco de centro *C* tem massa *m* e raio *R* e há uma massa concentrada *m* no ponto *B*. A distância entre os pontos *B* e *C* é *R*/2. O sistema encontra-se inicialmente em repouso, suspenso pelo fio *DE* e pela barra fixa *OA*, articulada ao disco em *A*. Num dado instante, o fio *DE* se rompe. Para o instante imediatamente após o rompimento do fio e considerando-se o sistema de coordenadas *Axyz*, pede-se:
(a) As coordenadas do centro de massa do sistema composto pelo disco e pela massa concentrada;
(b) O momento de inércia do sistema disco + massa concentrada em relação ao eixo *Az*;
(c) A aceleração angular $\vec{\alpha}$ do disco;
(d) As reações vinculares em *A*.

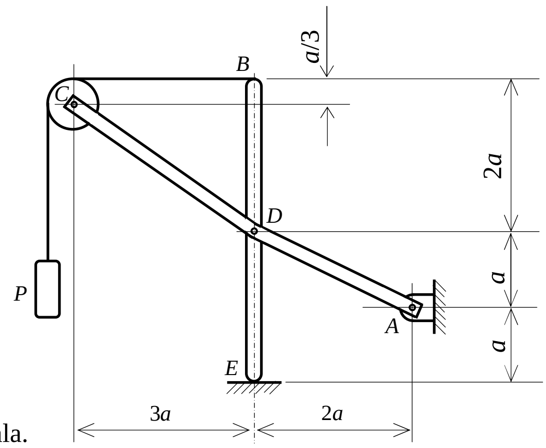


Dado: para o disco $J_{z_C} = \dfrac{mR^2}{2}$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231   CEP 05508-970, São Paulo, SP
Telefone: (0xx11) 3091 5337   Fax: (0xx11) 3813 1886
Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 – MECÂNICA I – Recuperação – 10 de fevereiro de 2015
GABARITO

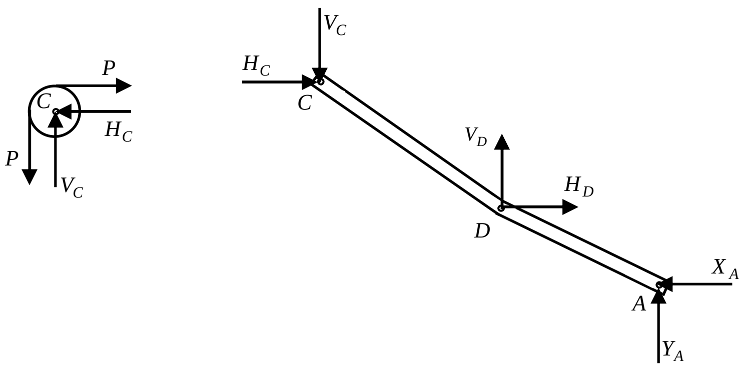
Questão 1 (3,0 pontos): A estrutura ao lado é formada pelas barras *AC* e *BE*, ambas contínuas, de peso desprezível, e unidas por um pino em *D*. Por uma articulação em *C* acopla-se uma polia ideal sobre a qual se enrola um cabo também ideal, o qual é preso ao ponto *B* e sustenta uma carga de peso *P*. São dadas as dimensões indicadas na figura. Sabe-se que em *E* a barra *BE* faz contato com uma superfície rugosa cujo coeficiente de atrito μ (desconhecido) é capaz de manter o sistema em equilíbrio. Pede-se:
(a) os diagramas de corpo livre das barras e da polia;
(b) a reação vincular em *A*;
(c) o mínimo valor do coeficiente de atrito μ compatível com a situação proposta.

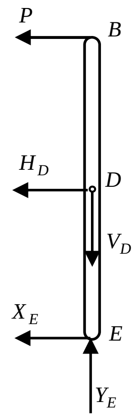


Obs.: desenho fora de escala.

Solução:
(a)

1,0





(b) Do equilíbrio da polia: $H_C = P$ e $V_C = P$ (1)

Para a barra *BE*: **0,5**

$\sum M_D = 0 \Rightarrow X_E = P$ (2)

$\sum F_x = 0 \Rightarrow -P - H_D - X_E = 0 \Rightarrow H_D = -2P$ (3)

$\sum F_y = 0 \Rightarrow Y_E = V_D$ (4)

Para a barra *AC*: **0,5**

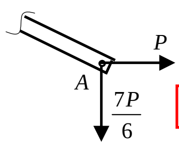
$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_C + H_D - X_A = 0$

Usando (1) e (3): $P - 2P - X_A = 0 \Rightarrow \boxed{X_A = -P}$ (5)

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -H_C \cdot \frac{8a}{3} + V_C \cdot 5a - V_D \cdot 2a - H_D \cdot a = 0 \Rightarrow -P \cdot \frac{8a}{3} + P \cdot 5a - V_D \cdot 2a + 2P \cdot a = 0 \Rightarrow V_D = \frac{13P}{6} \quad (6)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V_C + V_D + Y_A = 0 \Rightarrow -P + \frac{13P}{6} + Y_A = 0 \Rightarrow \boxed{Y_A = -\frac{7P}{6}}$$

Assim, as reações em *A* serão:



0,5

(c) No limite de escorregamento em *E* teremos: $X_E = \mu Y_E$

Usando (2), (4) e (6):

$$P = \mu \frac{13P}{6} \Rightarrow \boxed{\mu_{\min} = \frac{6}{13}}$$ **0,5**

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231 CEP 05508-970, São Paulo, SP
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

Questão 2 (3,5 pontos): O disco de centro O e raio r gira em torno da peça OB com velocidade angular constante $\omega_1 = \dot{\theta}$. O conjunto, por sua vez, gira em torno do eixo horizontal AC, com velocidade angular constante $\omega_2 = \dot{\phi}$.

Considere a peça OB como o referencial móvel, ao qual é solidário o sistema cartesiano $Bxyz$.

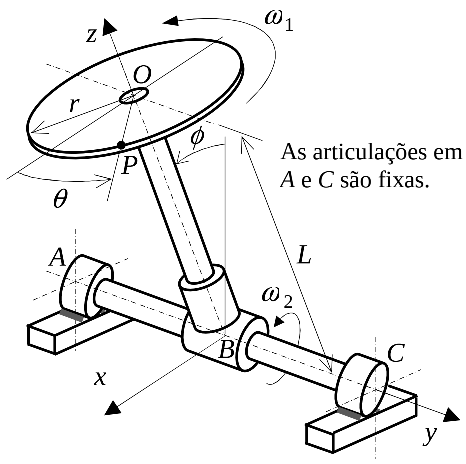
Na posição da figura, dada pelos ângulos (ϕ, θ), e expressando os resultados na base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ associada ao sistema cartesiano, pede-se:

(a) o vetor de rotação $\vec{\Omega}_a$ da peça OB e o vetor de rotação $\vec{\Omega}_D$ do disco;

(b) a velocidade $\vec{v}$ do ponto P, indicando suas componentes de arrastamento $\vec{v}_a$ e relativa $\vec{v}_r$;

(c) A aceleração $\vec{a}$ do ponto P, indicando suas componentes de arrastamento $\vec{a}_a$, relativa $\vec{a}_r$ e complementar $\vec{a}_c$;

(d) o vetor aceleração angular absoluta $\vec{\alpha}_D$ do disco de centro O.



Solução:

(a) $\boxed{\vec{\Omega}_a = \dot{\phi}\vec{j}}$; $\boxed{\vec{\Omega}_D = \dot{\phi}\vec{j} + \dot{\theta}\vec{k}}$

0,5 **0,5**

(b) $\vec{v}_r = \vec{v}_{O,r} + \dot{\theta}\vec{k} \wedge (P - O) = \dot{\theta}\vec{k} \wedge r(\cos\theta\vec{i} + \operatorname{sen}\theta\vec{j}) \Rightarrow \boxed{\vec{v}_r = \dot{\theta}r(-\operatorname{sen}\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j})}$ **0,5**

$\vec{v}_a = \vec{v}_{B,a} + \dot{\phi}\vec{j} \wedge (P - B) = \dot{\phi}\vec{j} \wedge [r(\cos\theta\vec{i} + \operatorname{sen}\theta\vec{j}) + L\vec{k}] \Rightarrow \boxed{\vec{v}_a = \dot{\phi}(L\vec{i} - r\cos\theta\vec{k})}$ **0,5**

$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_a \Rightarrow \boxed{\vec{v} = (\dot{\phi}L - \dot{\theta}r\operatorname{sen}\theta)\vec{i} + \dot{\theta}r\cos\theta\vec{j} - \dot{\phi}r\cos\theta\vec{k}}$

(c) $\vec{a}_r = \vec{a}_{O,r} + \ddot{\theta}\vec{k} \wedge (P - O) + \dot{\theta}\vec{k} \wedge [\dot{\theta}\vec{k} \wedge (P - O)] \Rightarrow \boxed{\vec{a}_r = -\dot{\theta}^2 r(\cos\theta\vec{i} + \operatorname{sen}\theta\vec{j})}$ **0,3**

$\vec{a}_a = \vec{a}_{B,a} + \ddot{\phi}\vec{j} \wedge (P - B) + \dot{\phi}\vec{j} \wedge [\dot{\phi}\vec{j} \wedge (P - B)] \Rightarrow \boxed{\vec{a}_a = -\dot{\phi}^2(r\cos\theta\vec{i} + L\vec{k})}$ **0,4**

$\vec{a}_c = 2\dot{\phi}\vec{j} \wedge \dot{\theta}r(-\operatorname{sen}\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}) \Rightarrow \boxed{\vec{a}_c = 2\dot{\phi}\dot{\theta}r\operatorname{sen}\theta\vec{k}}$ **0,3**

$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_a + \vec{a}_c \Rightarrow \boxed{\vec{a} = -(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2)r\cos\theta\vec{i} - \dot{\theta}^2 r\operatorname{sen}\theta\vec{j} + (2\dot{\phi}\dot{\theta}r\operatorname{sen}\theta - \dot{\phi}^2 L)\vec{k}}$

(d) $\vec{\alpha}_D = \dot{\phi}\dot{\vec{j}} + \dot{\theta}\dot{\vec{k}} = \dot{\phi}(\dot{\phi}\vec{j} \wedge \vec{j}) + \dot{\theta}(\dot{\phi}\vec{j} \wedge \vec{k}) \Rightarrow \boxed{\vec{\alpha}_D = \dot{\theta}\dot{\phi}\vec{i}}$ **0,5**

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231 CEP 05508-970, São Paulo, SP
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

Questão 3 (3,5 pontos): No sistema mostrado na figura, o disco de centro *C* tem massa *m* e raio *R* e há uma massa concentrada *m* no ponto *B*. A distância entre os pontos *B* e *C* é *R*/2. O sistema encontra-se inicialmente em repouso, suspenso pelo fio *DE* e pela barra fixa *OA*, articulada ao disco em *A*. Num dado instante, o fio *DE* se rompe. Para o instante imediatamente após o rompimento do fio e considerando-se o sistema de coordenadas *Axyz*, pede-se:

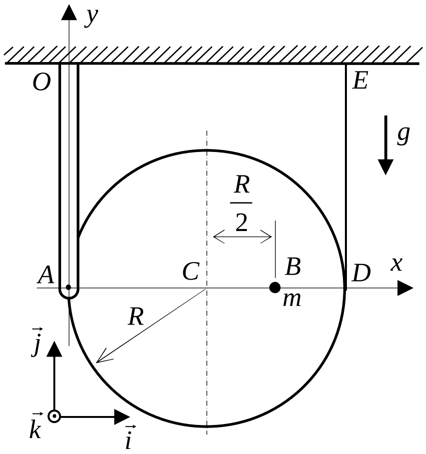
(a) As coordenadas do centro de massa do sistema composto pelo disco e pela massa concentrada;

(b) O momento de inércia do sistema disco + massa concentrada em relação ao eixo *Az*;

(c) A aceleração angular $\vec{\alpha}$ do disco;

(d) As reações vinculares em *A*.

Dado: para o disco $J_{z_C} = \dfrac{mR^2}{2}$



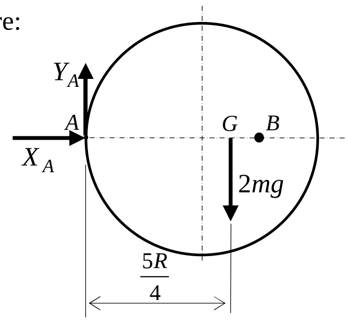
Solução:

0,5 (a) Por simetria, $\boxed{y_G = 0}$ e, como o sistema é plano, $\boxed{z_G = 0}$

$$(m+m)x_G = mR + m\frac{3R}{2} \Rightarrow \boxed{x_G = \frac{5R}{4}}$$

0,5 (b) $J_{z_A} = J_{z_{A\,Disco}} + J_{z_{A\,Massa}} \Rightarrow J_{z_A} = \left(\dfrac{mR^2}{2} + mR^2\right) + m\left(\dfrac{3R}{2}\right)^2 \Rightarrow \boxed{J_{z_A} = \dfrac{15}{4}mR^2}$

1,0 (c) Diagrama de corpo livre:



Teorema da quantidade de movimento angular para o sistema disco + massa concentrada, polo *A*

$$\frac{d}{dt}\left([I_A]\{\omega\}\right) + m(G-A)\wedge\vec{a}_A = \vec{M}_A, \text{ em que } \vec{a}_A = \vec{0}$$

$$\Rightarrow J_{z_A}\dot{\omega}\vec{k} = \vec{M}_A \Rightarrow \frac{15}{4}mR^2\dot{\omega} = -2mg\frac{5R}{4}, \text{ e como } \vec{\alpha} = \dot{\omega}\vec{k} \Rightarrow \boxed{\vec{\alpha} = -\frac{2g}{3R}\vec{k}}$$

(d) Relação cinemática para o sistema no instante pedido, considerando o centro de massa *G* do sistema:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}}\wedge(G-A) + \vec{\omega}\wedge[\vec{\omega}\wedge(G-A)], \text{ em que } \vec{a}_A = \vec{0} \text{ e } \vec{\omega} = \vec{0}, \Rightarrow \vec{a}_G = -\frac{5g}{6}\vec{j}$$ 0,5

Teorema do movimento do baricentro para o sistema disco + massa concentrada:

0,5
$$\begin{cases} \Sigma F_x = 2ma_{G_x} \Rightarrow X_A = 2m0 \\ \Sigma F_y = 2ma_{G_y} \Rightarrow Y_A - 2mg = 2m\left(-\dfrac{5g}{6}\right) \end{cases} \Rightarrow \boxed{X_A = 0} \text{ e } \boxed{Y_A = \frac{1}{3}mg}$$

0,5