ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 2100 – MECÂNICA A – Recuperação – 04 de fevereiro de 2014

Duração da Prova: 100 minutos

Obs. 1: não é permitido o uso de dispositivos eletrônicos como calculadoras, tablets e celulares.

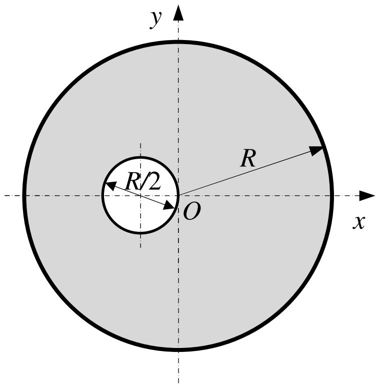
Obs. 2: a partir do momento em que a Prova for encerrada, não é permitido ao aluno escrever mais nada na folha de respostas, havendo possibilidade de anulação da respectiva prova se isto ocorrer.

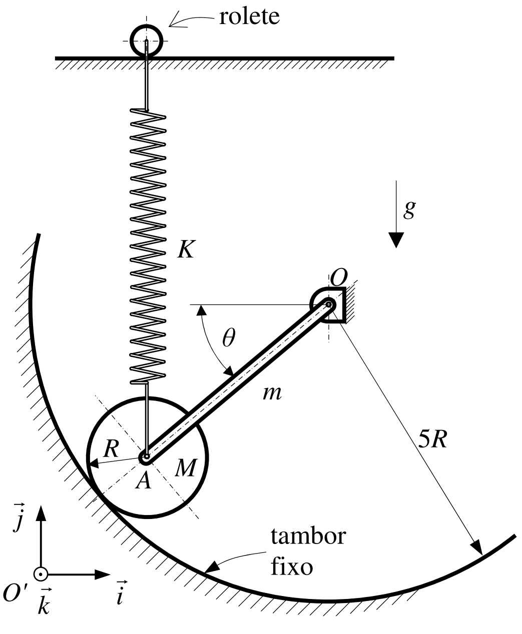
QUESTÃO 1 (3,0 pontos) – Um disco de raio R e densidade superficial homogênea ρ apresenta um furo de diâmetro $R/2$. Utilizando-se o sistema de eixos $Oxyz$ fixo a essa peça, determine:

a) o centro de massa;

b) o momento de inércia J_{Oz} ;

c) o produto de inércia J_{Oxz} .





QUESTÃO 2 (4,0 pontos) – O sistema mostrado é composto por um disco homogêneo de centro A, massa M e raio R, uma barra homogênea de massa m e comprimento $4R$ e uma mola ideal de constante elástica K. Quando em movimento, o disco rola sem escorregar sobre o tambor. As articulações em O (ponto fixo) e em A são ideais. O rolete que sustenta a mola é ideal e a mantém sempre na posição vertical. **No instante inicial, quando $\theta = 0^o$**, todo o sistema está em repouso e a força exercida pela mola é nula. **<u>No instante final em que $\theta = 90^o$</u>**, pedem-se, em função dos parâmetros fornecidos e utilizando o sistema de coordenadas $O'\vec{i}\,\vec{j}\vec{k}$:

a) a relação entre as velocidades angulares ω do disco, e Ω da barra;

b) as expressões da energia cinética do sistema (em função da velocidade angular ω acima) nos instantes inicial e final;

c) para as forças que realizam trabalho, as expressões destes trabalhos entre os instantes considerados;

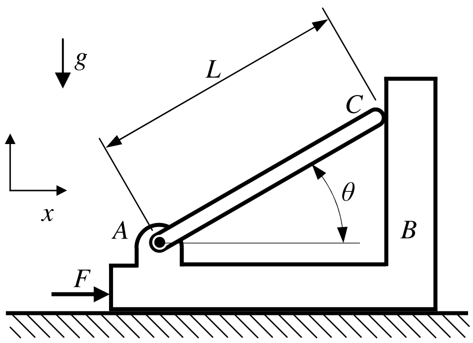
d) a velocidade angular ω no instante final.

QUESTÃO 3 (3,0 pontos) – O mecanismo da figura repousa numa superfície horizontal sem atrito e está submetido a uma força F. O bloco B tem massa desprezível. A barra AC tem massa m e comprimento L, e está articulada em A. A barra encosta-se ao bloco B no ponto C, sem atrito, formando um ângulo $\theta = 30°$ com a horizontal. Pedem-se:

a) diagrama de corpo livre da barra.

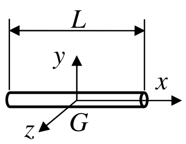
b) a aceleração do ponto A;

c) a máxima força F para que não haja descolamento da barra em relação ao bloco no ponto C.



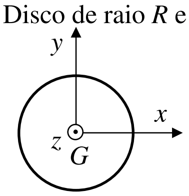
Formulário:

Haste delgada de massa m



$$J_{Gz} = \frac{mL^2}{12}$$

Disco de raio R e massa m



$$J_{Gz} = \frac{mR^2}{2}$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia Mecânica

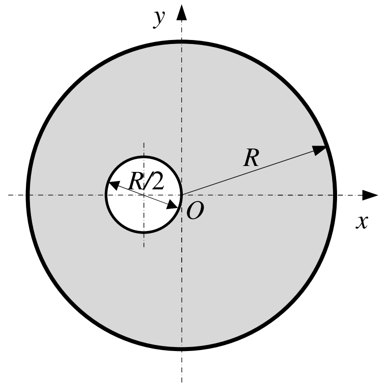
GABARITO

QUESTÃO 1 (3,0 pontos) – Um disco de raio R e densidade superficial homogênea ρ apresenta um furo de diâmetro $R/2$. Utilizando-se o sistema de eixos $Oxyz$ fixo a essa peça, determine:

a) o centro de massa;

b) o momento de inércia J_{Oz} ;

c) o produto de inércia J_{Oxz} .



Solução

1,0 a) A peça é a resultante da composição geométrica do disco de "massa positiva" e um disco de "massa negativa:
A abcissa x do seu centro de massa é, portanto, dada por:

$$x_G = \frac{\pi R^2 \cdot 0 - \left[\pi \cdot \left(\frac{R}{4}\right)^2\right] \cdot \left(-\frac{R}{4}\right)}{\pi R^2 - \pi \cdot \left(\frac{R}{4}\right)^2} = \frac{\frac{\pi R^2}{16} \cdot \frac{R}{4}}{\frac{16}{16}\pi R^2 - \frac{\pi R^2}{16}} = \frac{\frac{\pi R^2}{16} \cdot \frac{R}{4}}{15\frac{\pi R^2}{16}} \Rightarrow \boxed{x_G = \frac{R}{60}}$$

Por simetria: $\boxed{y_G = 0}$

Por ser figura plana: $\boxed{z_G = 0}$

1,0 b) O momento de inércia J_{Oz} da peça é calculado conforme se indica a seguir:

$$J_{OzDiscoCompleto} = \frac{1}{2}\rho\pi R^2 \cdot R^2 = \frac{1}{2}\rho\pi R^4 \text{ (formulário)}$$

$$J_{OzFuro} = -\frac{1}{2}\rho\pi\left(\frac{R}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{R}{4}\right)^2 + \left[-\rho\pi\left(\frac{R}{4}\right)^2\right] \cdot \left(\frac{R}{4}\right)^2 = -\rho\pi R^4\left(\frac{1}{2\cdot 16\cdot 16} + \frac{1}{16\cdot 16}\right) = = -\rho\pi R^4 \frac{1}{256}\left(\frac{1}{2}+1\right) = -\rho\pi R^4 \frac{3}{512}$$

$$J_{OzFuro} = -\rho\pi R^4 \frac{3}{512}$$

$$J_{Oz} = J_{OzDiscoCompleto} + J_{OzFuro}$$

$$J_{Oz} = \rho\pi R^4\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{512}\right) = \rho\pi R^4 \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{256}\right) = \rho\pi R^4 \frac{1}{2}\left(\frac{256-3}{256}\right) = \rho\pi R^4 \frac{1}{2}\left(\frac{253}{256}\right) = \rho\pi R^4 \frac{253}{512}$$

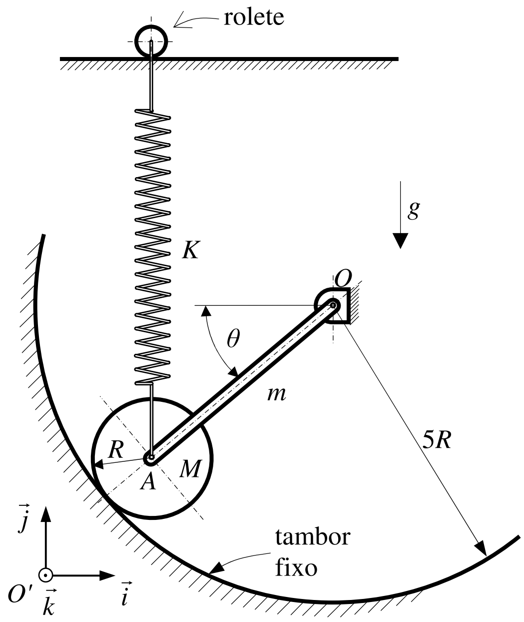
$$\boxed{J_{Oz} = \frac{253}{512}\rho\pi R^4}$$

1,0 c) Como a peça está contida no plano Oxy, o seu produto de inércia J_{Oxz} é nulo.

$\boxed{J_{Oxz} = 0}$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica



QUESTÃO 2 (4,0 pontos) – O sistema mostrado é composto por um disco homogêneo de centro A, massa M e raio R, uma barra homogênea de massa m e comprimento $4R$ e uma mola ideal de constante elástica K. Quando em movimento, o disco rola sem escorregar sobre o tambor. As articulações em O (ponto fixo) e em A são ideais. O rolete que sustenta a mola é ideal e a mantém sempre na posição vertical. **No instante inicial, quando θ = 0º**, todo o sistema está em repouso e a força exercida pela mola é nula. **No instante final em que θ = 90º**, pedem-se, em função dos parâmetros fornecidos e utilizando o sistema de coordenadas $O'\vec{i}\,\vec{j}\vec{k}$:

a) a relação entre as velocidades angulares ω do disco, e Ω da barra;

b) as expressões da energia cinética do sistema (em função da velocidade angular ω acima) nos instantes inicial e final;

c) para as forças que realizam trabalho, as expressões destes trabalhos entre os instantes considerados;

d) a velocidade angular ω no instante final.

Solução:

1,0 a) O ponto de contato entre o disco e o tambor é o CIR do disco. Chamando este ponto de "C", temos:

Ponto A do disco: $\vec{v}_A = \vec{v}_C + \omega\vec{k} \wedge (A - C) = \omega\vec{k} \wedge R\vec{j} = -\omega R\vec{i}$

Ponto A da barra: $\vec{v}_A = \vec{v}_O + \Omega\vec{k} \wedge (A - C) = \Omega\vec{k} \wedge (-4R\vec{j}) = 4R\Omega\vec{i}$

Portanto: $\boxed{\Omega = -\dfrac{\omega}{4}}$

1,0 b)

Como o sistema parte do repouso: $\boxed{T(t_i) = 0}$

$$T(t_f) = \underbrace{\frac{1}{2}M|\vec{v}_A|^2 + \frac{1}{2}J_A\omega^2}_{\text{disco, pólo } A} + \underbrace{\frac{1}{2}J_O\Omega^2}_{\text{barra, pólo } O}$$

Para o disco: $J_A = \dfrac{1}{2}MR^2$

Para a barra: $J_O = \dfrac{m(4R)^2}{12} + m(2R)^2 = \dfrac{16mR^2}{3}$

Portanto: $T(t_f) = \dfrac{1}{2}M\omega^2R^2 + \dfrac{1}{4}M\omega^2R^2 + \dfrac{mR^2\omega^2}{6} \Rightarrow \boxed{T(t_f) = \dfrac{(9M + 2m)R^2\omega^2}{12}}$

1,0 c) Trabalho do peso do disco τ_d , do peso da barra τ_b e da mola τ_K :

$$\tau_{i \to f} = \tau_d + \tau_b + \tau_K = 4RMg + 2Rmg - \frac{K}{2}(4R)^2$$

$$\boxed{\tau_{i \to f} = 2gR(2M + m) - 8KR^2}$$

1,0 d) Teorema da Energia Cinética:

$$\tau_{i \to f} = T(t_f) \Rightarrow 2gR(2M + m) - 8KR^2 = \frac{(9M + 2m)R^2\omega^2}{12} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{12[2g(2M + m) - 8KR]}{(9M + 2m)R}}$$

$$\boxed{\vec{\omega} = -\sqrt{\frac{12[2g(2M + m) - 8KR]}{(9M + 2m)R}}\,\vec{k}}$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

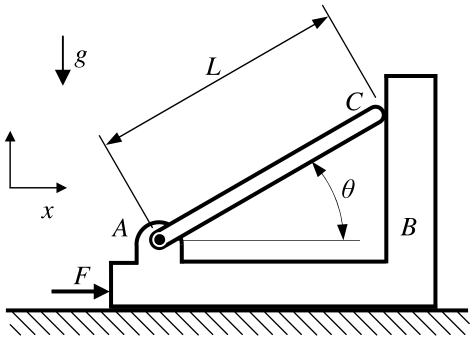
Departamento de Engenharia Mecânica

QUESTÃO 3 (3,0 pontos) – O mecanismo da figura repousa numa superfície horizontal sem atrito e está submetido a uma força *F*. O bloco *B* tem massa desprezível. A barra *AC* tem massa *m* e comprimento *L*, e está articulada em *A*. A barra encosta-se ao bloco *B* no ponto *C*, sem atrito, formando um ângulo θ = 30º com a horizontal. Pedem-se:

a) diagrama de corpo livre da barra.

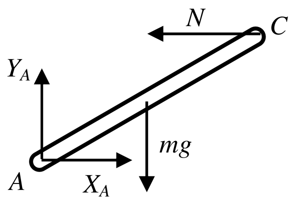
b) a aceleração do ponto *A*;

c) a máxima força *F* para que não haja descolamento da barra em relação ao bloco no ponto *C*.



Solução:

0,5 a) Diagrama de corpo livre da barra:



1,0 b) Aplicando o TR para o conjunto em translação:

$$m\vec{a}_G = \vec{R}^{ext} \Rightarrow ma_A = ma_G = F \Rightarrow \boxed{a_A = \frac{F}{m}}$$

1,5 c) Aplicando o TR:

Em *x*:

$$ma = X_A - N \Rightarrow F = X_A - N \qquad (1)$$

Em *y*:

$$0 = Y_A - mg \Rightarrow Y_A = mg \qquad (2)$$

Aplicando agora o TQMA, também em translação:

$$J_{Gz}\dot{\omega} = N\frac{L}{2}\text{sen}30^o + X_A\frac{L}{2}\text{sen}30^o - Y_A\frac{L}{2}cos30^o = 0$$

Na iminência do descolamento, *N* = *0*. Usando a equação acima com as equações (1) e (2), teremos:

$$0 + F_{máx}\frac{L}{2}\frac{1}{2} - mg\frac{L}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{F_{máx} = mg\sqrt{3}}$$