ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia Mecânica

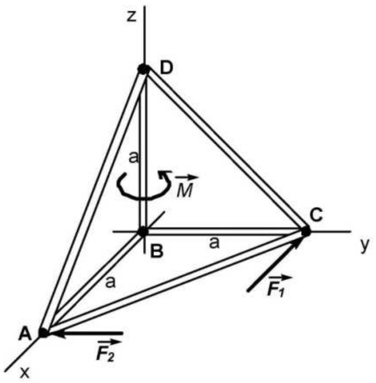
PME 2100 Mecânica A

Prova de Recuperação - Duração 100 minutos – 05 de fevereiro de 2013

1 - Não é permitido o uso de calculadoras, celulares, *tablets* e outros equipamentos similares.

2 – A partir do momento em que a Prova for encerrada, não é permitido ao aluno escrever mais nada na folha de respostas, havendo possibilidade de anulação da respectiva prova se isto ocorrer.

Questão 1 (**3,0 pontos**): A estrutura mostrada na figura é composta pelas barras *AB*, *BC*, *CD*, *AD*, *AC* e *BD*, de massa desprezível. A estrutura está submetida ao sistema de forças composto por duas forças $\vec{F}_1 = -F\vec{i}$ e $\vec{F}_2 = -F\vec{j}$, aplicadas respectivamente em *C* e *A*, e por um binário de momento $\vec{M} = M\vec{k}$. Determine:



(a) a resultante deste sistema de forças; **(0,5 pontos)**

(b) o momento do sistema em relação ao polo B; **(0,5 pontos)**

(c) o vetor e o ponto de aplicação da força que deve ser adicionada a esse sistema para obter seu equilíbrio. **(2,0 pontos)**

SOLUÇÃO:

A resultante do sistema de forças, é:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -F\vec{i} - F\vec{j}$$

Resposta (a) – 0,5 pontos

O momento resultante do sistema de forças, é:

$$\vec{M}_B = (C-B)\wedge\vec{F}_1 + (A-B)\wedge\vec{F}_2 + \vec{M} = a\vec{j}\wedge\left(-F\vec{i}\right) + a\vec{i}\wedge\left(-F\vec{j}\right) + M\vec{k} = M\vec{k}$$

Resposta (b) – 0,5 pontos

Como

$$I = \vec{R}\cdot\vec{M}_B = \left(-F\vec{i} - F\vec{j}\right)\cdot M\vec{k} = 0\,,$$

o sistema de forças dado é equivalente a uma única força aplicada a um ponto arbitrário de seu eixo central, de equação

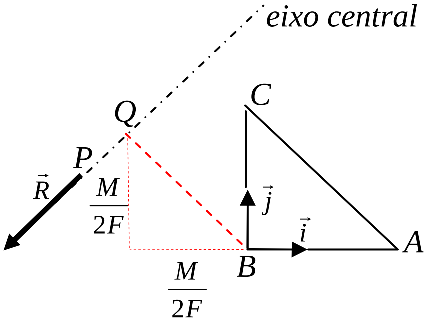
$$P = B + \frac{\vec{R}\wedge\vec{M}_B}{\left|\vec{R}\right|^2} + \lambda\frac{\vec{R}}{\left|\vec{R}\right|}$$

Sendo $\left|\vec{R}\right|^2 = F^2 + F^2 = 2F^2$, resulta que

$$P = B + \frac{\left(-F\vec{i} - F\vec{j}\right)\wedge M\vec{k}}{2F^2} + \lambda\frac{\left(-F\vec{i} - F\vec{j}\right)}{F\sqrt{2}} = B + \frac{M}{2F}\left(-\vec{i} + \vec{j}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{M}{F}\lambda\left(-\vec{i} - \vec{j}\right)$$

$$\Rightarrow P = B + \frac{M}{2F}\left(-\vec{i} + \vec{j}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\lambda\left(-\vec{i} - \vec{j}\right)$$

Na Figura abaixo apresenta-se o eixo central do sistema, relativamente ao sistema de coordenadas adotado:



O sistema original de forças pode ser ser anulado mediante a aplicação de uma força adicional $\vec{F}_3$ que satisfaça às condições I e II abaixo:

I) $\vec{R} + \vec{F}_3 = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_3 = -\vec{R} = F\vec{i} + F\vec{j}$

Resposta (c-1) – 0,5 pontos

II) o ponto P de aplicação de $\vec{F}_3$ pertence simultaneamente ao eixo central do sistema de forças e a uma qualquer das barras AB, BC ou AC da estrutura.

Há, portanto, três casos a serem analisados:

II-1: $P \in x \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{M}{F} \Rightarrow P = B - \frac{M}{F}\vec{i}$

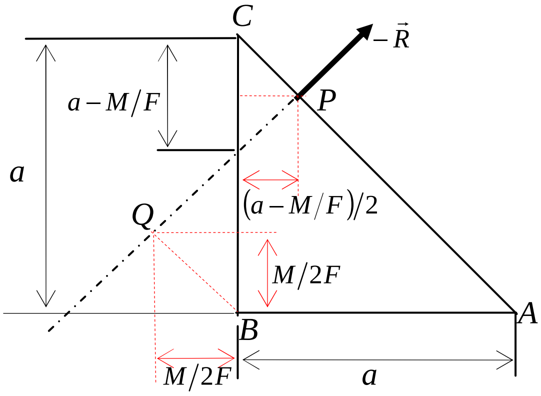
II-2: $P \in y \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{M}{F} \Rightarrow P = B + \frac{M}{F}\vec{j}$

II-3: $P \in reta\ y = a - x \Rightarrow \lambda < -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{M}{F} \Rightarrow P = B + \frac{M}{2F}\left(-\sqrt{2}\lambda - 1\right)\vec{i} + \frac{M}{2F}\left(1 - \sqrt{2}\lambda\right)\vec{j}$

O caso II-1 deve ser descartado, pois o ponto P se situaria no segmento x<0, portanto externo à barra AB.

Os casos II-2 e II-3 são viáveis, bastando para tanto que $0 < \frac{M}{F} \leq a$.

O ponto de aplicação da força sobre a barra AC é, portanto, $P = \left(0, M/F, 0\right)$.No caso da barra AC pode-se determiná-lo mediante a construção geométrica indicada abaixo.

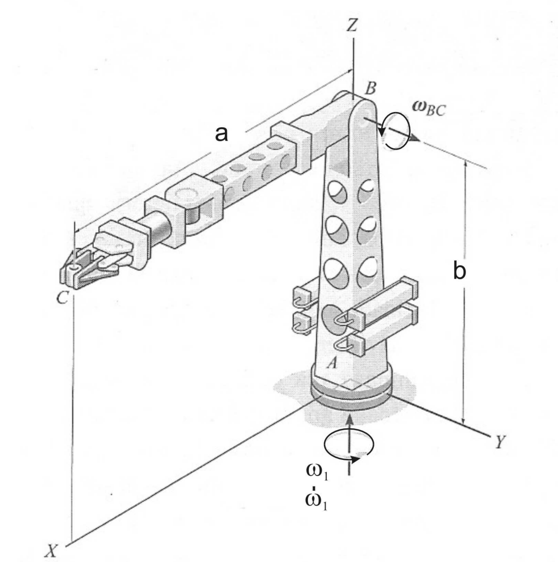


Dessa forma, os possíveis pontos de aplicação da força à estrutura, de modo a mantê-la em equilíbrio, são:

$P = \left(0, M/F, 0\right)$ e $P = \left(\left(a - M/F\right)/2, \left(a + M/F\right)/2, 0\right)$

Resposta (c-2) – 1,5 pontos

<u>Questão 2</u> (3,5 pontos): No instante mostrado, a base do braço robótico gira em torno do eixo *z* com velocidade angular ω_1 e aceleração $\dot{\omega}_1$. Além disso, a lança *BC* gira com uma velocidade angular constante ω_{BC}. Considerando a coluna *AB* como o referencial móvel, determine:



(a) as velocidades relativa, de arrastamento e absoluta do objeto pontual *C* mantido na sua garra nesse instante;

(b) as acelerações relativa, de arrastamento, complementar e absoluta de *C* no mesmo instante;

(c) a aceleração angular absoluta da lança *BC*.

SOLUÇÃO:

As velocidades relativa, de arrastamento e absoluta do ponto C são dadas, respectivamente, por:

$$\vec{v}_{C,r} = \vec{v}_{B,r} + \vec{\omega}_r \wedge (C - B) = -a.\omega_{BC}\vec{k}$$

$$\vec{v}_{C,a} = \vec{v}_{B,a} + \vec{\omega}_a \wedge (C - B) = a.\omega_1\vec{j}$$

$$\vec{v}_C = \vec{v}_{C,r} + \vec{v}_{C,a} = a.\omega_1\vec{j} - a.\omega_{BC}\vec{k}$$

Resposta (a)

As acelerações relativa, de arrastamento, complementar e absoluta do ponto C são dadas, respectivamente, por:

$$\vec{a}_{C,r} = \vec{a}_{B,r} + \vec{\alpha}_r \wedge (C - B) + \vec{\omega}_r \wedge [\vec{\omega}_r \wedge (C - B)] = -a.\omega_{BC}^2\vec{\imath}$$

$$\vec{a}_{C,a} = \vec{a}_{B,a} + \vec{\alpha}_a \wedge (C - B) + \vec{\omega}_a \wedge [\vec{\omega}_a \wedge (C - B)] = a(-\omega_1^2\vec{\imath} + \dot{\omega}_1\vec{\jmath})$$

$$\vec{a}_{C,c} = 2\vec{\omega}_a \wedge \vec{v}_{C,r} = \vec{0}$$

$$\vec{a}_C = \vec{a}_{C,r} + \vec{a}_{C,a} + \vec{a}_{C,c} = -a(\omega_1^2 + \omega_{BC}^2)\vec{\imath} + a.\dot{\omega}_1\vec{\jmath}$$

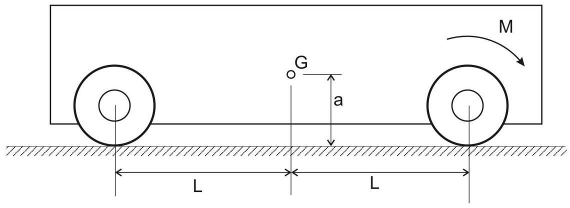
Resposta (b)

A aceleração angular absoluta da lança BC é dada por:

$$\vec{\alpha}_{BC} = \vec{\alpha}_r + \vec{\alpha}_a + \vec{\omega}_a \wedge \vec{\omega}_r = \vec{0} + \dot{\vec{\omega}}_1 + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}_{BC} = \dot{\omega}_1\vec{k} + \omega_1\vec{k} \wedge \omega_{BC}\vec{\jmath} = -\omega_1.\omega_{BC}\vec{\imath} + \dot{\omega}_1\vec{k}$$

Resposta (c)

<u>Questão 3</u> (3,5 pontos): Considere o modelo simplificado de carro composto por duas rodas (discos de raio R, com massa desprezível) e uma placa retangular (homogênea, de massa m e baricentro G), conforme mostra a figura. Cada roda é articulada pelo seu centro na placa. Na roda dianteira é aplicado um momento M constante. Determine:



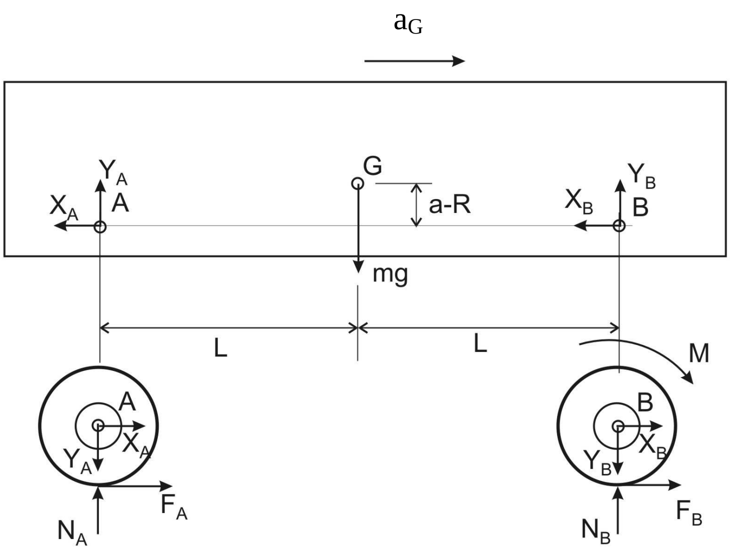
(a) O diagrama de corpo livre da placa e o diagrama de corpo livre de cada roda.

(b) A aceleração do baricentro G do carro, supondo que não haja escorregamento entre as rodas e o solo.

(c) A reação normal do solo sobre cada roda.

SOLUÇÃO:

Os diagramas de corpo livre solicitados são apresentados na figura abaixo.



Resposta (a)

Aplicando-se os teoremas da resultante (TR) e da quantidade de movimento angular (TQMA) às rodas (de massa desprezível), tem-se:

Roda A:

TQMA: $F_A = 0$ (1)

TR: $X_A = -F_A = 0$ (2)

$N_A = Y_A$ (3)

Roda B:

TQMA: $F_B = \dfrac{M}{R}$ (4)

TR: $X_B = -F_B = -\dfrac{M}{R}$ (5)

$N_B = Y_B$ (6)

Placa:

TR: $m.a_G = -X_A - X_B$ (7)

$$0 = Y_A + Y_B - mg\ 0 \qquad (8)$$

Das equações (2), (5) e (7) obtém-se:

$$a_G = \frac{M}{mR}$$

Resposta (b)

Aplicando-se o TQMA para a placa, relativamente ao pólo G, resulta:

$$0 = -Y_A L + Y_B L - X_A(a-R) - X_B(a-R) = -Y_A L + Y_B L - 0 + M\frac{a-R}{R}$$

Usando as equações (3), (6) e (8), obtém-se:

$$0 = -Y_A L - Y_A L + mgL + M\frac{(a-R)}{R}$$

e, por decorrência, tem-se:

$$N_A = \frac{1}{2L}\left[mgL + M\frac{a-R}{R}\right]$$

$$N_B = \frac{1}{2L}\left[mgL - M\frac{a-R}{R}\right]$$

Resposta (c)