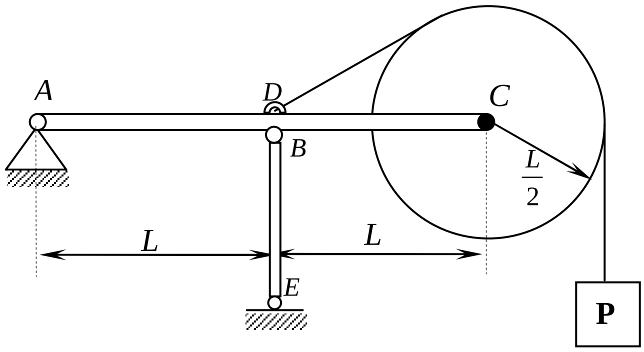
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 2100 Mecânica A

Prova de Recuperação - Duração 110 minutos – 14 de fevereiro de 2012

Questão 1 (3,5 pontos). A polia de raio $L/2$ é ligada à barra delgada AC de comprimento $2L$ através de uma articulação em C. Um fio flexível e inextensível passa pela polia e tem uma de suas extremidades presa à barra por uma argola D e a outra presa a um bloco de peso P. A estrutura é vinculada a uma articulação em A e a uma vertical BE, de comprimento L. Considerando a barra, a polia e o fio com pesos desprezíveis, pedem-se:

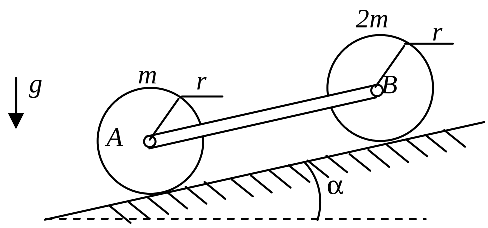


(a) os diagramas de corpo livre das barras e da polia; **(1,5 ponto)**

(b) as reações vinculares em A; **(1,0 ponto)**

(c) as forças na barra BE. **(1,0 ponto)**

Questão 3 (3,5 pontos). Os discos homogêneos de centros A e B, raios iguais a r e massas $m_A = m$ e $m_B = 2m$, respectivamente, estão ligados entre si por uma barra AB de massa desprezível, conforme indicado na figura. Sabendo que os discos rolam sem escorregar, descendo uma uma rampa que faz um ângulo α com a horizontal, pedem-se:

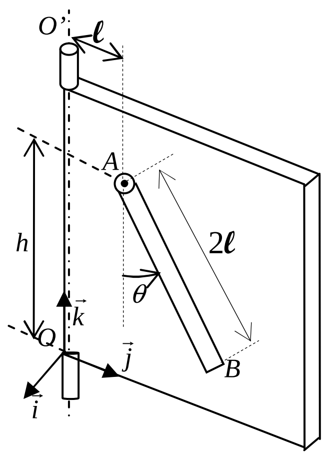


(a) os diagramas de corpo livre dos discos de centros A e B;

(b) as forças de atrito atuantes nos discos de centros A e B;

(c) a força atuante na barra AB. **Pontuação: a: 1,0; (TMB+TMA: 1,0); Vínculos cinemáticos: 0,5; b+c: 1,0**

Questão 3 (3,0 pontos). Uma placa plana gira em torno do eixo fixo vertical OO' com velocidade angular $\dot{\varphi}$ constante ao mesmo tempo que transporta uma barra AB, de comprimento 2ℓ, vinculada por meio de um pino A situado a uma distância ℓ do eixo OO'. (Portanto, a barra somente pode se mover no plano da placa). Em um dado instante a barra AB forma um ângulo θ com a vertical e apresenta velocidade angular $\dot{\theta}$ e aceleração angular $\ddot{\theta}$. Utilizando a base $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ solidária à placa, determinar, para esse instante:



(a) os vetores rotação relativa e de arrastamento da barra AB; **(0,5 ponto)**

(b) as velocidades relativa e de arrastamento do ponto B; **(1,0 ponto)**

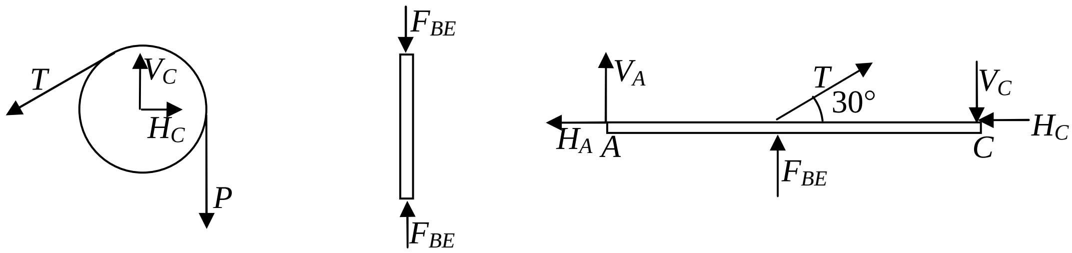
(c) os vetores aceleração rotacional relativa, de arrastamento e complementar (ou de Résal) da barra AB. **(0,5 ponto)**

(d) as acelerações relativa, de arrastamento e complementar (ou de Coriolis) do ponto B. **(1,0 ponto)**

RESOLUÇÃO

QUESTÃO 1.

Os diagramas de corpo livre da polia e das barras são apesentados nas figuras abaixo:



Resposta (a)

Aplicando-se as equações de equilíbrio à polia, tem-se:

$$\sum M_{Cz} = 0 \Rightarrow T \cdot r - P \cdot r = 0 \Rightarrow T = P$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_C - T\cos 30 = 0 \Rightarrow H_C = T\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow H_C = P\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_C - T\sin 30 - P = 0 \Rightarrow V_C = \frac{3P}{2}$$

Aplicando-se as equações de equilíbrio à barra *AC*, tem-se:

$$\sum M_{Az} = 0 \Rightarrow \left(F_{BE} + T\sin 30\right)\cdot L - V_C \cdot 2L = 0 \Rightarrow F_{BE} \cdot L + \frac{P}{2}L - \frac{3P}{2}\cdot 2L = 0 \Rightarrow F_{BE} = \frac{5P}{2}\ (compress\tilde{a}o)$$

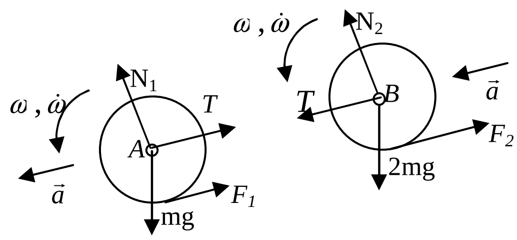
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -H_A + T\cos 30 - H_C = 0 \Rightarrow -H_A + P\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{P\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_A + T\sin 30 + F_{BE} - V_C = 0 \Rightarrow V_A + \frac{P}{2} + \frac{5P}{2} - \frac{3P}{2} = 0 \Rightarrow V_A = -\frac{3P}{2}$$

Resposta (b)

QUESTÃO 2.

Os diagramas de corpo livre dos discos de centros *A* e *B* são apresentados na figura abaixo:



Resposta (a)

Para calcular as forças de atrito atuantes nos contatos dos discos com o plano inclinado, bem como a força atuante na barra *AB*, aplicaremos os teoremas do movimento do baricentro e do momento da quantidade de movimento.

Para o disco de centro *A*, tem-se:

$$-F_1 - T + mg\sin\alpha = ma_1 \qquad (1)$$

$$N_1 - mg\cos\alpha = 0 \qquad (2)$$

$$F_1 \cdot r = J_{Az}\dot{\omega} = \frac{mr^2}{2}\dot{\omega} \Rightarrow F_1 = \frac{mr}{2}\dot{\omega} \qquad (3)$$

Para o disco de centro *B*, tem-se:

$$-F_2 + T + 2mg\sin\alpha = 2ma_2 \qquad (4)$$

$$N_2 - 2mg\cos\alpha = 0 \qquad (5)$$

$$F_2 \cdot r = J_{Bz}\dot{\omega} = \frac{2mr^2}{2}\dot{\omega} \Rightarrow F_2 = mr\dot{\omega} \qquad (6)$$

Além disso, as equações vinculares da Cinemática fornecem:

$$a_1 = a_2 = a = \dot{\omega}r \qquad (7)$$

Substituindo-se (7) e (3) em (1) e (7) e (6) em (2), obtêm-se:

$$-\frac{mr}{2}\dot{\omega} - T + mg\sin\alpha = m\dot{\omega}r \Rightarrow \frac{3mr}{2}\dot{\omega} = -T + mg\sin\alpha \qquad (8)$$
$$-mr\dot{\omega} + T + 2mg\sin\alpha = 2m\dot{\omega}r \Rightarrow 3m\dot{\omega}r = T + 2mg\sin\alpha \qquad (9)$$

Adicionando-se (8) e (9), resulta:

$$\left(\frac{3mr}{2} + 3mr\right)\dot{\omega} = 3mg\sin\alpha \Rightarrow \dot{\omega} = \frac{2g\sin\alpha}{3r} \qquad (10)$$

Substituindo-se (10) em (9) obtém-se:

$$3mr\frac{2g\sin\alpha}{3r} = T + 2mg\sin\alpha \Rightarrow T = 0$$

Resposta (b)

Substituindo-se (10) em (3) e em (6), obtêm-se:

$$F_1 = \frac{mr}{2}\frac{2g\sin\alpha}{3r} \Rightarrow F_1 = \frac{mg\sin\alpha}{3}$$

$$F_2 = mr\frac{2g\sin\alpha}{3r} \Rightarrow F_2 = \frac{2mg\sin\alpha}{3}$$

Resposta (c)

QUESTÃO 3.

O vetor rotação relativa da barra AB é: $\vec{\omega}_{rel} = \dot{\theta}\vec{i}$

O vetor rotação de arrastamento da barra AB é: $\vec{\omega}_{arr} = \dot{\varphi}\vec{k}$

Portanto, o vetor rotação absoluta da barra AB é: $\vec{\omega}_{abs} = \dot{\varphi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{i}$

Resposta (a)

A velocidade relativa do ponto B é dada por:

$$\vec{V}_{B,rel} = \vec{V}_{A,rel} + \vec{\omega}_{rel} \wedge (B - A) = \vec{0} + \dot{\theta}\vec{i} \wedge 2\ell\left(\sin\theta\vec{j} - \cos\theta\vec{k}\right) = 2\dot{\theta}\ell\left(\cos\theta\vec{j} + \sin\theta\vec{k}\right)$$

A velocidade de arrastamento de B é dada por:

$$\vec{V}_{B,arr} = \vec{V}_{A,arr} + \vec{\omega}_{arr} \wedge (B - A) = \left[\vec{V}_O + \vec{\omega}_{arr}(A - O)\right] + \vec{\omega}_{arr} \wedge (B - A)$$
$$\Rightarrow \vec{V}_{B,arr} = \vec{0} + \dot{\varphi}\vec{k} \wedge \left(\ell\vec{j} + h\vec{k}\right) + \dot{\varphi}\vec{k} \wedge 2\ell\left(\sin\theta\vec{j} - \cos\theta\vec{k}\right) = -\dot{\varphi}\ell\vec{i} - 2\dot{\varphi}\ell\sin\theta\vec{i} = -\dot{\varphi}\ell(1 + 2\sin\theta)\vec{i}$$

Portanto, a velocidade absoluta de B é:

$$\vec{V}_{B,abs} = -\dot{\varphi}\ell(1 + 2\sin\theta)\vec{i} + 2\dot{\theta}\ell\cos\theta\vec{j} + 2\dot{\theta}\ell\sin\theta\vec{k}$$

Resposta (b)

O vetor aceleração rotacional relativa da barra AB é: $\dot{\vec{\omega}}_{rel} = \ddot{\theta}\vec{i}$

O vetor aceleração rotacional de arrastamento, é: $\dot{\vec{\omega}}_{arr} = \vec{0}$

O vetor aceleração rotacional complementar, é: $\dot{\vec{\omega}}_{c} = \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{\omega}_{rel} = \dot{\varphi}\vec{k} \wedge \dot{\theta}\vec{i} = \dot{\varphi}\dot{\theta}\vec{j}$

Portanto, o vetor aceleração rotacional absoluta, é: $\dot{\vec{\omega}}_{abs} = \ddot{\theta}\vec{i} + \dot{\varphi}\dot{\theta}\vec{j}$

Resposta (c)

A aceleração relativa do ponto B é:

$$\vec{a}_{B,rel} = \vec{a}_{A,rel} + \dot{\vec{\omega}}_{rel}\Big|_{O\vec{i}\vec{j}\vec{k}\ fixo} \wedge (B-A) + \vec{\omega}_{rel} \wedge \left[\vec{\omega}_{rel} \wedge (B-A)\right] = \vec{0} + \ddot{\theta}\vec{i} \wedge 2\ell\left(\sin\theta\vec{j} - \cos\theta\vec{k}\right) + \dot{\theta}\vec{i} \wedge \left[\dot{\theta}\vec{i} \wedge 2\ell\left(\sin\theta\vec{j} - \cos\theta\vec{k}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{B,rel} = 2\ell\ddot{\theta}\sin\theta\vec{k} + 2\ell\ddot{\theta}\cos\theta\vec{j} - 2\ell\dot{\theta}^2\sin\theta\vec{j} + 2\ell\dot{\theta}^2\cos\theta\vec{k} = 2\ell\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\right)\vec{j} + 2\ell\left(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\right)\vec{k}$$

A aceleração de arrastamento do ponto B é:

$$\vec{a}_{B,arr} = \vec{a}_{A,arr} + \dot{\vec{\omega}}_{arr} \wedge (B-A) + \vec{\omega}_{arr} \wedge \left[\vec{\omega}_{arr} \wedge (B-A)\right] = \vec{a}_{A,arr} + \vec{0} \wedge (B-A) + \vec{\omega}_{arr} \wedge \left[\vec{\omega}_{arr} \wedge (B-A)\right] = \vec{a}_{A,arr} + \vec{\omega}_{arr} \wedge \left[\vec{\omega}_{arr} \wedge (B-A)\right]$$

Mas

$$\vec{a}_{A,arr} = \vec{a}_{O} + \dot{\vec{\omega}}_{arr} \wedge (A-O) + \vec{\omega}_{arr} \wedge \left[\vec{\omega}_{arr} \wedge (A-O)\right] = \vec{0} + \vec{0} \wedge (A-O) + \dot{\varphi}\vec{k} \wedge \left[\dot{\varphi}\vec{k} \wedge (A-O)\right] = \dot{\varphi}\vec{k} \wedge \left[\dot{\varphi}\vec{k} \wedge \left(\ell\vec{j} + h\vec{k}\right)\right] = -\dot{\varphi}^2\ell\vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{B,arr} = -\dot{\varphi}^2\ell\vec{j} + \dot{\varphi}\vec{k} \wedge \left[\dot{\varphi}\vec{k} \wedge 2\ell\left(\sin\theta\vec{j} - \cos\theta\vec{k}\right)\right] = -\dot{\varphi}^2\ell\vec{j} - 2\dot{\varphi}^2\ell\sin\theta\vec{j} = -\dot{\varphi}^2(1 + 2\sin\theta)\ell\vec{j}$$

A aceleração complementar do ponto B é:

$$\vec{a}_{B,c} = 2\vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{V}_{B,rel} = 2\dot{\varphi}\vec{k} \wedge 2\dot{\theta}\ell\left(\cos\theta\vec{j} + \sin\theta\vec{k}\right) = -4\dot{\varphi}\dot{\theta}\ell\cos\theta\vec{i}$$

Portanto, a aceleração absoluta do ponto B é:

$$\vec{a}_{B,abs} = -4\dot{\varphi}\dot{\theta}\ell\cos\theta\vec{i} + \left[2\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\right) - \dot{\varphi}^2(1 + 2\sin\theta)\right]\ell\vec{j} + 2\ell\left(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\right)\vec{k}$$

Resposta (d)