ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231 CEP 05508-970, São Paulo, SP
Telefone: (0xx11) 3091-5337 Fax: (0xx11) 3813-1886

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 2100 – MECÂNICA A – Recuperação – 08 de fevereiro de 2011

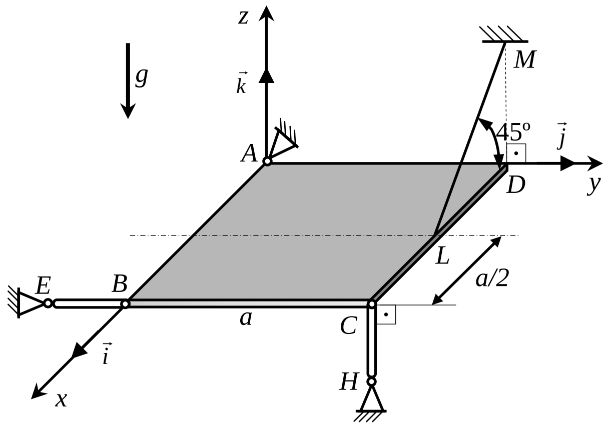
Duração da Prova: 100 minutos (não é permitido o uso de calculadoras)

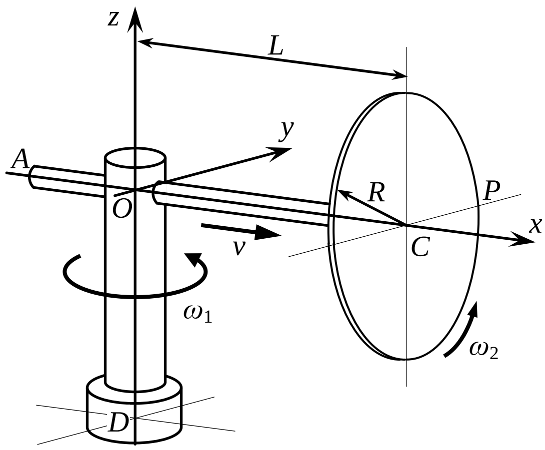
QUESTÃO 1 (3,5 pontos): Considere a placa homogênea, quadrada, de lados a e peso P, articulada em A, suspensa pelo fio LM e articulada às barras EB e CH, de pesos desprezíveis, conforme indicado na figura. Admitindo-se que o sistema esteja em equilíbrio, pede-se:

(a) os diagramas de corpo livre da placa $ABCD$ e das barras EB e CH;

(b) as equações de equilíbrio da placa $ABCD$;

(c) as reações em A.





QUESTÃO 2 (3,5 pontos): No mecanismo mostrado na figura, os pontos O e D são fixos, e o suporte OD possui vetor de rotação $\vec{\omega}_1 = \omega_1 \vec{k}$ (constante) em relação a um referencial fixo no solo. As faces planas do disco de centro C e raio R são perpendiculares ao eixo de simetria radial da barra AC. O disco e a barra AC formam um único sólido que possui vetor de rotação $\vec{\omega}_2 = \omega_2 \vec{i}$ (ω_2 constante) em relação ao suporte OD, e o ponto C possui velocidade $\vec{v} = v\vec{i}$ (v constante) em relação ao suporte OD. O sistema de coordenadas $Oxyz$ é fixo no suporte OD e o vetor $(P-C)$ é paralelo ao eixo Oy, no instante mostrado na figura. Considerando o suporte OD como referencial móvel, e o instante mostrado na figura, determine:

a) as velocidades relativa ($\vec{v}_{P,rel}$), de arrastamento ($\vec{v}_{P,arr}$) e absoluta ($\vec{v}_{P,abs}$) do ponto P.

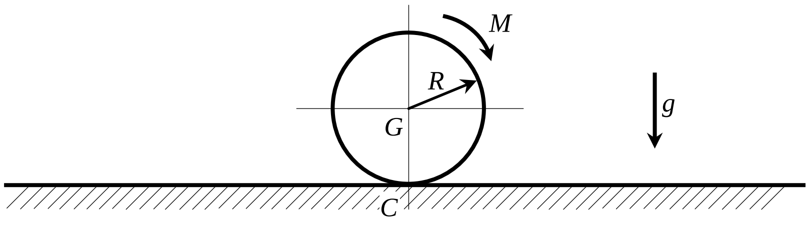
b) as acelerações relativa ($\vec{a}_{P,rel}$), de arrastamento ($\vec{a}_{P,arr}$) e absoluta ($\vec{a}_{P,abs}$) do ponto P.

c) o vetor de rotação absoluto ($\vec{\omega}_{D,abs}$) e o vetor aceleração angular absoluto ($\dot{\vec{\omega}}_{D,abs}$) do disco de centro C.

QUESTÃO 3 (3,0 pontos): Um binário de momento M é aplicado a um cilindro homogêneo de raio R e massa m. O coeficiente de atrito entre o cilindro e a superfície é μ e aceleração da gravidade é g. Considerando que o cilindro parte do repouso, determine a aceleração angular do cilindro $\dot{\omega}$ para os seguintes casos**:**

a) o cilindro rola e escorrega;

b) o cilindro rola sem escorregar.

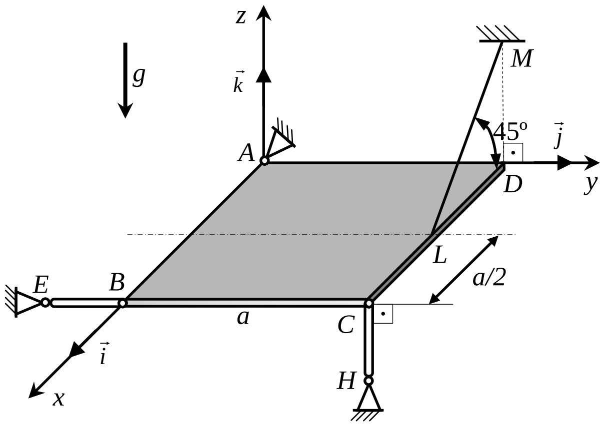


$$J_G = \frac{mR^2}{2}$$

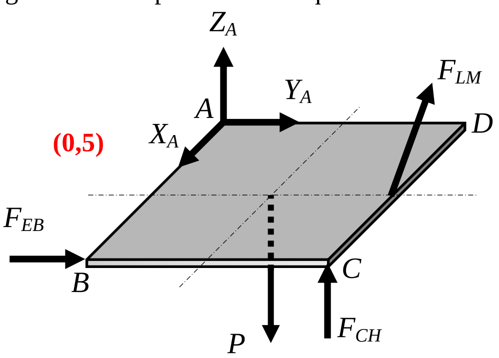
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231   CEP 05508-970, São Paulo, SP
Telefone: (0xx11) 3091-5337   Fax: (0xx11) 3813-1886
Departamento de Engenharia Mecânica

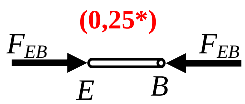
QUESTÃO 1 (3,5 pontos): Considere a placa homogênea, quadrada, de lados *a* e peso *P*, articulada em *A*, suspensa pelo fio *LM* e articulada às barras *EB* e *CH*, de pesos desprezíveis, conforme indicado na figura. Admitindo-se que o sistema esteja em equilíbrio, pede-se:

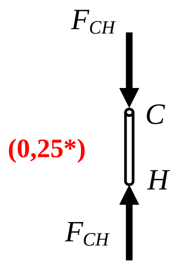
(1,0) (a) os diagramas de corpo livre da placa *ABCD* e das barras *EB* e *CH*;
(1,5) (b) as equações de equilíbrio da placa *ABCD*;
(1,0) (c) as reações em *A*.



Solução:
a) Os diagramas de corpo livre são esquematizados abaixo:







b) Aplicando-se as equações de equilíbrio da Estática, tem-se:
$\vec{R} = \vec{0}$, logo:

R_x: $\boxed{X_A - F_{LM}\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0}$ **(0,25*)** (1)

R_y: $\boxed{F_{EB} + Y_A = 0}$ **(0,25*)** (2)

R_z: $\boxed{-P + F_{CH} + Z_A + F_{LM}\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0}$ **(0,25*)** (3)

*** valor arredondado para a primeira casa decimal, com a soma correspondente ao valor do item**

$\vec{M}_A = \vec{0}$, logo:

$$(B-A)\wedge F_{EB}\vec{j} + (G-A)\wedge\left(-P\vec{k}\right) + (C-A)\wedge F_{CH}\vec{k} + (L-A)\wedge F_{LM}\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\vec{i}+\vec{k}\right) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow a\vec{i}\wedge F_{EB}\vec{j} + \left(\frac{a}{2}\vec{i} + \frac{a}{2}\vec{j}\right)\wedge\left(-P\vec{k}\right) + \left(a\vec{i} + a\vec{j}\right)\wedge F_{CH}\vec{k} + \left(\frac{a}{2}\vec{i} + a\vec{j}\right)\wedge F_{LM}\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\vec{i}+\vec{k}\right) = \vec{0}$$

Desenvolvendo-se a equação vetorial acima, resultam as três equações escalares abaixo:

M_{Ax}: $\boxed{aF_{CH} - \dfrac{a}{2}P + aF_{LM}\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0}$ **(0,25*)** (4)

M_{Ay}: $\boxed{\dfrac{a}{2}P - aF_{CH} - \dfrac{a}{2}F_{LM}\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0}$ **(0,25*)** (5)

M_{Az}: $\boxed{aF_{EB} + aF_{LM}\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0}$ **(0,25*)** (6)

c) Comparando a equação (4) com a equação (5), obtém-se: $F_{LM} = 0$ e $F_{CH} = \dfrac{P}{2}$

Usando esses resultados na equação (1) obtemos: $\boxed{X_A = 0}$ **(1/3*)**

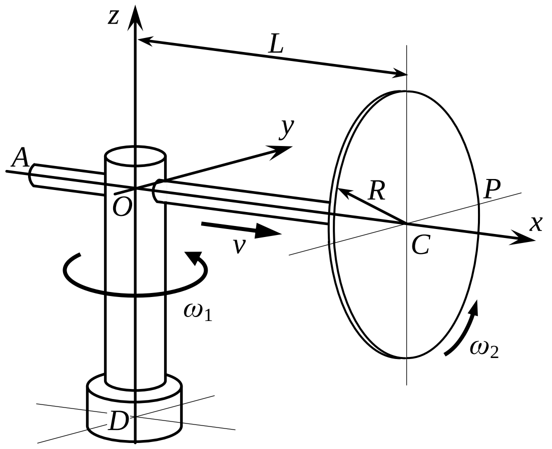
Usando esses resultados nas equações (2) e (6) obtemos: $F_{EB} = 0$ e $\boxed{Y_A = 0}$ **(1/3*)**

Usando esses resultados na equação (3) obtemos: $\boxed{Z_A = \dfrac{P}{2}}$ **(1/3*)**

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231 CEP 05508-970, São Paulo, SP
Telefone: (0xx11) 3091-5337 Fax: (0xx11) 3813-1886

Departamento de Engenharia Mecânica



QUESTÃO 2 (3,5 pontos): No mecanismo mostrado na figura, os pontos *O* e *D* são fixos, e o suporte *OD* possui vetor de rotação $\vec{\omega}_1 = \omega_1 \vec{k}$ (constante) em relação a um referencial fixo no solo. As faces planas do disco de centro *C* e raio *R* são perpendiculares ao eixo de simetria radial da barra *AC*. O disco e a barra *AC* formam um único sólido que possui vetor de rotação $\vec{\omega}_2 = \omega_2 \vec{i}$ (ω_2 constante) em relação ao suporte *OD*, e o ponto *C* possui velocidade $\vec{v} = v\vec{i}$ (*v* constante) em relação ao suporte *OD*. O sistema de coordenadas *Oxyz* é fixo no suporte *OD* e o vetor $(P-C)$ é paralelo ao eixo *Oy*, no instante mostrado na figura. Considerando o suporte *OD* como referencial móvel, e o instante mostrado na figura, determine:

(1,5) a) as velocidades relativa ($\vec{v}_{P,rel}$), de arrastamento ($\vec{v}_{P,arr}$) e absoluta ($\vec{v}_{P,abs}$) do ponto *P*.

(1,5) b) as acelerações relativa ($\vec{a}_{P,rel}$), de arrastamento ($\vec{a}_{P,arr}$) e absoluta ($\vec{a}_{P,abs}$) do ponto *P*.

(0,5) c) o vetor de rotação absoluto ($\vec{\omega}_{D,abs}$) e o vetor aceleração angular absoluto ($\dot{\vec{\omega}}_{D,abs}$) do disco de centro *C*.

Solução:

a)

Para o sólido formado pela barra *AC* e o disco

$$\vec{v}_{P,rel} = \vec{v}_{C,rel} + \vec{\omega}_{rel} \wedge (P-C) = v\vec{i} + \omega_2 \vec{i} \wedge R\vec{j} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{P,rel} = v\vec{i} + \omega_2 R\vec{k}} \quad \text{(0,5)}$$

$$\vec{v}_{P,arr} = \vec{v}_{O,arr} + \vec{\omega}_{arr} \wedge (P-O) = \vec{0} + \omega_1 \vec{k} \wedge (L\vec{i} + R\vec{j}) \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{P,arr} = -\omega_1 R\vec{i} + \omega_1 L\vec{j}} \quad \text{(0,5)}$$

$$\vec{v}_{P,abs} = \vec{v}_{P,rel} + \vec{v}_{P,arr} = (v\vec{i} + \omega_2 R\vec{k}) + (-\omega_1 R\vec{i} + \omega_1 L\vec{j}) \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{P,abs} = (v - \omega_1 R)\vec{i} + \omega_1 L\vec{j} + \omega_2 R\vec{k}} \quad \text{(0,5)}$$

b)

$$\vec{a}_{P,rel} = \vec{a}_{C,rel} + \dot{\vec{\omega}}_{rel} \wedge (P-C) + \vec{\omega}_{rel} \wedge [\vec{\omega}_{rel} \wedge (P-C)] = \vec{0} + \vec{0} \wedge R\vec{j} + \omega_2 \vec{i} \wedge (\omega_2 \vec{i} \wedge R\vec{j}) \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{P,rel} = -\omega_2^2 R\vec{j}} \quad \text{(0,5)}$$

$$\vec{a}_{P,arr} = \vec{a}_{O,arr} + (\dot{\vec{\omega}}_{arr})_{rel} \wedge (P-O) + \vec{\omega}_{arr} \wedge [\vec{\omega}_{arr} \wedge (P-O)] = \vec{0} + \vec{0} \wedge (L\vec{i} + R\vec{j}) + \omega_1 \vec{k} \wedge [\omega_1 \vec{k} \wedge (L\vec{i} + R\vec{j})]$$

$$\vec{a}_{P,arr} = \omega_1 \vec{k} \wedge (\omega_1 L\vec{j} - \omega_1 R\vec{i}) \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{P,arr} = -\omega_1^2 L\vec{i} - \omega_1^2 R\vec{j}} \quad \text{(0,5)}$$

$$\vec{a}_{P,Cor} = 2\vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{v}_{P,rel} = 2\omega_1 \vec{k} \wedge (v\vec{i} + \omega_2 R\vec{k}) \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{P,Cor} = 2\omega_1 v\vec{j}}$$

$$\vec{a}_{P,abs} = \vec{a}_{P,rel} + \vec{a}_{P,arr} + \vec{a}_{P,Cor} = -\omega_2^2 R\vec{j} + (-\omega_1^2 L\vec{i} - \omega_1^2 R\vec{j}) + 2\omega_1 v\vec{j}$$

$$\boxed{\vec{a}_{P,abs} = -\omega_1^2 L\vec{i} + (2\omega_1 v - \omega_2^2 R - \omega_1^2 R)\vec{j}} \quad \text{(0,5)}$$

c)

$$\vec{\omega}_{D,abs} = \vec{\omega}_{D,rel} + \vec{\omega}_{D,arr} = \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_1 \Rightarrow \boxed{\vec{\omega}_{D,abs} = \omega_2 \vec{i} + \omega_1 \vec{k}} \quad \text{(0,3)}$$

$$\dot{\vec{\omega}}_{D,abs} = (\dot{\vec{\omega}}_{D,rel})_{rel} + \dot{\vec{\omega}}_{D,arr} + \dot{\vec{\omega}}_{D,Res} = \vec{0} + \vec{0} + \vec{\omega}_{D,arr} \wedge \vec{\omega}_{D,rel} = \omega_1 \vec{k} \wedge \omega_2 \vec{i} \Rightarrow \boxed{\dot{\vec{\omega}}_{D,abs} = \omega_1 \omega_2 \vec{j}} \quad \text{(0,2)}$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

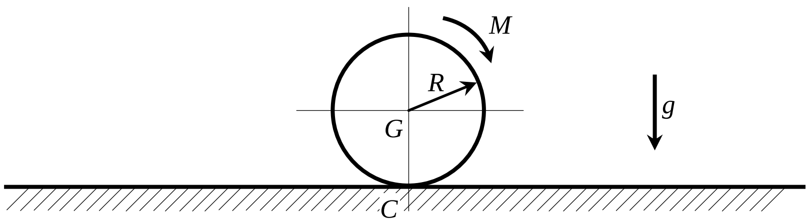
Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231 CEP 05508-970, São Paulo, SP
Telefone: (0xx11) 3091-5337 Fax: (0xx11) 3813-1886

Departamento de Engenharia Mecânica

QUESTÃO 3 (3,0 pontos): Um binário de momento M é aplicado a um cilindro homogêneo de raio R e massa m. O coeficiente de atrito entre o cilindro e a superfície é μ e aceleração da gravidade é g. Considerando que o cilindro parte do repouso, determine a aceleração angular do cilindro $\dot{\omega}$ para os seguintes casos**:**

(1,5) a) o cilindro rola e escorrega;

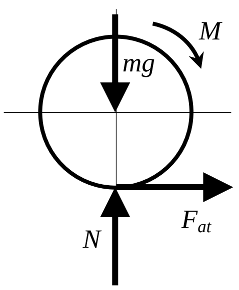
(1,5) b) o cilindro rola sem escorregar.



$$J_G = \frac{mR^2}{2}$$

Solução

Diagrama de corpo livre do disco:



a) Rola e escorrega

Teorema do Momento Angular com pólo em G

$$\dot{H}_G = \vec{M}_G^{Ext}$$

$$J_G \dot{\omega} = M - F_{at} R \qquad \textbf{(0,5)}$$

Como há escorregamento: $F_{at} = \mu N$ **(0,5)**

Pelo Teorema do Movimento do Baricentro, na direção vertical (nessa direção a aceleração do baricentro é nula):

$$N - mg = 0 \Rightarrow N = mg$$

Portanto:

$$\frac{mR^2}{2}\dot{\omega} = M - \mu mgR \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{\omega} = \frac{2(M - \mu mgR)}{mR^2}} \qquad \textbf{(0,5)}$$

b) Rola sem escorregar

Teorema do Momento Angular com pólo em C

$$\vec{v}_C = \vec{0}$$

$$\dot{\vec{H}}_C = \vec{M}_C^{Ext} \Rightarrow J_C \dot{\omega} = M \qquad \textbf{(0,5)}$$

Pelo Teorema dos Eixos Paralelos:

$$J_C = J_G + mR^2 = \frac{3}{2} mR^2 \qquad \textbf{(0,5)}$$

Portanto:

$$\frac{3}{2} mR^2 \dot{\omega} = M$$

$$\boxed{\dot{\omega} = \frac{2}{3}\frac{M}{mR^2}} \qquad \textbf{(0,5)}$$