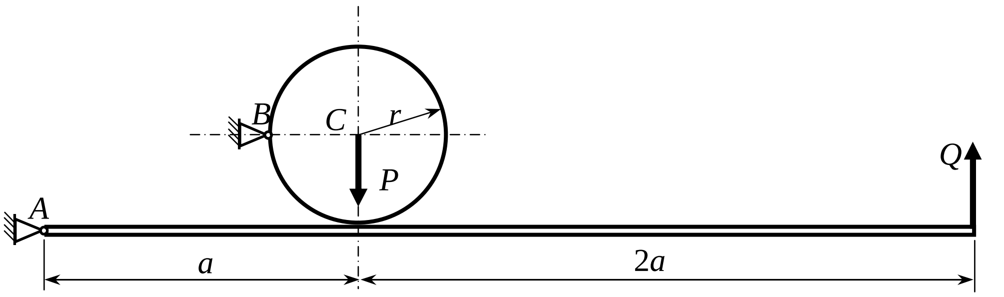
<u>**PME 2100 Mecânica A**</u>

<u>**Prova de Recuperação - Duração 100 minutos – 5 de fevereiro de 2010 - GABARITO**</u>

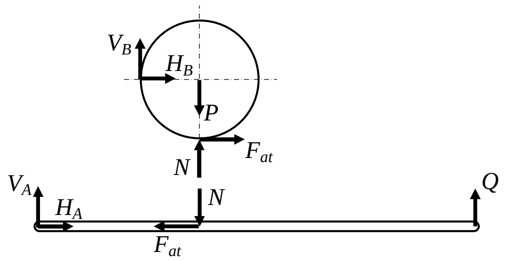
1 (3 pontos) – Considere uma barra rígida, de comprimento *3a* e peso desprezível, articulada sem atrito em *A*. Sobre esta barra apóia-se um disco, de centro *C*, raio *r* e peso *P*, que está articulado sem atrito em *B*. Sabendo que o coeficiente de atrito entre a barra e o disco é μ = 0,5, determine em função de *P* os valores máximo e mínimo de *Q* compatíveis com o equilíbrio do sistema.



Solução:

Caso 1

Diagramas de corpo livre **(0,5 pontos)**,



Equação de equilíbrio, momento, Disco

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow N \cdot R + F_{at} \cdot R - P \cdot R = 0$$

Equação de equilíbrio, momento, Barra

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow Q \cdot 3a - N \cdot a = 0 \Rightarrow N = 3Q$$ **(0,5 pontos)**

No limite:

$$F_{at} = \mu \cdot N \Rightarrow F_{at} = \frac{N}{2} \Rightarrow F_{at} = \frac{3Q}{2}$$ **(0,5 pontos)**

Substituindo:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow N \cdot R + F_{at} \cdot R - P \cdot R = 0$$

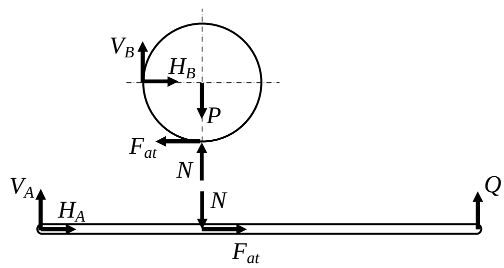
$$3Q \cdot R + \frac{3Q}{2} \cdot R - P \cdot R = 0 \Rightarrow \frac{9}{2} Q - P = 0$$

$$Q = \frac{2P}{9}$$

(0,5 pontos)

Caso 2

Diagramas de corpo livre



Equação de equilíbrio, momento, Disco

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow N \cdot R - F_{at} \cdot R - P \cdot R = 0$$

Equação de equilíbrio, momento, Barra

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow Q \cdot 3a - N \cdot a = 0 \Rightarrow N = 3Q$$

No limite:

$$F_{at} = \mu \cdot N \Rightarrow F_{at} = \frac{N}{2} \Rightarrow F_{at} = \frac{3Q}{2}$$

Substituindo:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow N \cdot R - F_{at} \cdot R - P \cdot R = 0$$

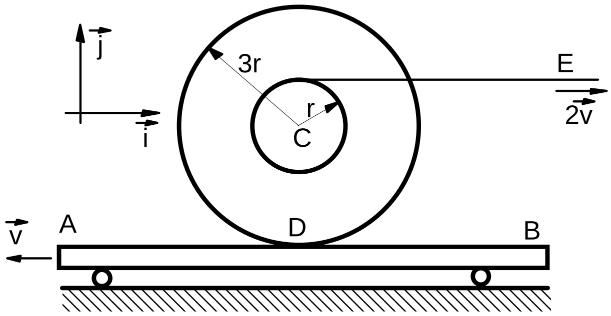
$$3Q \cdot R - \frac{3Q}{2} \cdot R - P \cdot R = 0 \Rightarrow \frac{3Q}{2} Q - P = 0$$

$$Q = \frac{2P}{3}$$ **(1 ponto)**

Portanto, para o equilíbrio:

$$\frac{2P}{9} < Q < \frac{2P}{3}$$

2 (3 pontos) - Na figura os discos concêntricos são solidários. A barra *AB* move-se horizontalmente com velocidade constante $\vec{v}$. Não há escorregamento em *D*. Um fio, flexível e inextensível, é enrolado no disco menor e sua extremidade *E* tem velocidade absoluta igual a $2\vec{v}$ como mostrado na figura. Adotando como referencial móvel a barra *AB* e utilizando os versores $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ determine:
a) as velocidades relativa e absoluta do ponto *D*;
b) o vetor de rotação absoluta ($\vec{\omega}$) dos discos;
c) o *CIR* (Centro Instantâneo de Rotação) dos discos;
d) as acelerações relativa, de arrastamento, de Coriolis (complementar) e absoluta do ponto *D* do disco.



Solução:

a) Velocidade relativa do ponto D: $\vec{v}_{D,r} = \vec{0}$.

Velocidade absoluta do ponto D: $\vec{v}_D = -v\vec{i}$ **(0,5 pontos)**

b) A velocidade de E é a mesma velocidade do ponto do disco em contato com o fio. Usando a expressão de Poisson:

$$\vec{v}_E = 2v\vec{i} \Rightarrow 2v\vec{i} = \vec{v}_D + \omega\vec{k} \wedge (4r\vec{j}) \Rightarrow \omega = -\frac{3v}{4r} \Rightarrow \vec{\omega} = -\frac{3v}{4r}\vec{k}$$ **(0,5 pontos)**

c) A velocidade do CIR é nula. Usando a expressão de Poisson:

$$\vec{v}_D = \vec{v}_{CIR} + \vec{\omega} \wedge (D - CIR) \Rightarrow -v\vec{i} = -\frac{3v}{4r}\vec{k} \wedge (D - CIR)\vec{j}.$$

A solução da equação vetorial resulta $(CIR - D) = \frac{4}{3}r\vec{j}$. **(0,5 pontos)**

d) Aceleração relativa do ponto D $\vec{a}_{D,r} = 3\omega^2 r\vec{j}$. **(0,5 pontos)**

Aceleração de arrastamento do ponto D $\vec{a}_{D,a} = \vec{0}$. **(0,5 pontos)**

Aceleração complementar do ponto D $\vec{a}_{D,c} = \vec{0}$. **(0,5 pontos)**

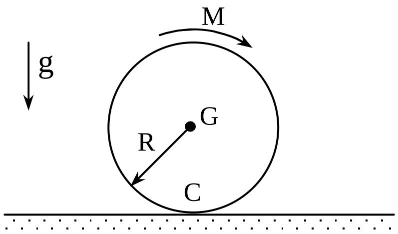
Aceleração absoluta do ponto D $\vec{a}_D = \vec{a}_{D,r} + \vec{a}_{D,a} + \vec{a}_{D,c} = 3\omega^2 r\vec{j}$

3 (4 pontos) - Um binário de momento *M* é aplicado a um cilindro de raio *R* e massa *m*. O coeficiente de atrito entre o cilindro e a superfície é μ e aceleração da gravidade é *g*. Considerando que o cilindro parte do repouso, determine a aceleração angular do cilindro $\dot{\omega}$ para os seguintes casos:

a) O cilindro rola e escorrega.

b) O cilindro rola sem escorregar.

c) Considerando o caso do cilindro que rola sem escorregar, e sabendo que o momento *M* é constante, calcule a energia cinética do cilindro e o trabalho do momento *M*, decorridos *t* segundos após a partida, lembrando que o sistema parte do repouso.



Dado o momento de inércia do cilindro com relação a um eixo de direção normal ao plano da figura e que passa por pelo seu baricentro G:

$$J_G = \frac{mR^2}{2}.$$

Solução:

Sendo F a força de atrito e N a reação normal da superfície.

a) Rola e escorrega - Teorema do Momento Angular com pólo em G

$$\dot{\vec{H}}_G = \vec{M}_G^{Ext}$$

$$J_G \dot{\omega} = M - FR$$

$$F = \mu N = \mu mg$$

$$\dot{\omega} = \frac{2(M - \mu mgR)}{mR^2}$$ **(1,5 pontos)**

b) Rola sem escorregar – Teorema do Momento Angular com pólo em C

$$\vec{v}_c = \vec{0}$$

$$\dot{\vec{H}}_C = \vec{M}_C^{Ext}$$

$$\frac{3}{2} mR^2 \dot{\omega} = M$$

$$\dot{\omega} = \frac{2}{3}\frac{M}{mR^2}$$ **(1,0 pontos)**

c) Do item anterior:

$$\dot{\omega} = \frac{2M}{3mR^2}$$

Como *M* é constante, e o cilindro parte do repouso:

$$\omega(t) = \frac{2M}{3mR^2} t$$ **(0,5 pontos)**

Energia cinética:

$$E(t) = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} J_G \omega^2 = \frac{1}{2} m(\omega R)^2 + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{3mR^2}{2}\omega^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{3mR^2}{2}\cdot\left(\frac{2M}{3mR^2}t\right)^2 \Rightarrow E(t) = \frac{2}{6}\cdot\frac{M^2 t^2}{mR^2}$$ **(0,5 pontos)**

Trabalho do momento *M*: como apenas o momento realiza trabalho e o sistema parte do repouso, pelo TEC:

$$W(t) = E(t) - E(t_0) = \frac{2}{6}\cdot\frac{M^2 t^2}{mR^2}$$ **(0,5 pontos)**