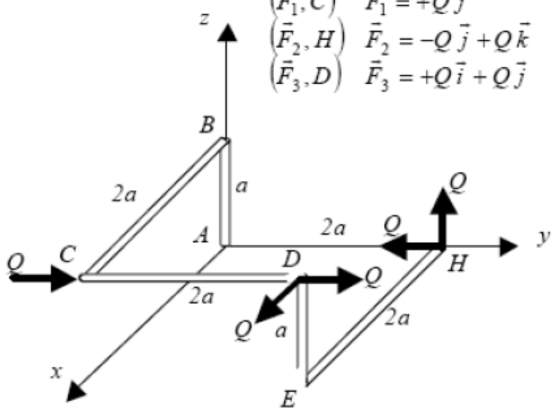
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia Mecânica

PME 2100 – Mecânica Geral A – Prova de Recuperação; 12/02/2008
Duração: 100 min (não é permitido o uso de calculadoras)

1ª. Questão (3 pontos) – A barra *ABCDEH* tem peso desprezível e está submetida ao sistema de forças da figura.

(a) Determine a resultante do sistema de forças, $\vec{R}$.
(b) Calcule o momento do sistema de forças em relação ao pólo *A*, $\vec{M}_A$.
(c) Verifique se o sistema é redutível a uma única força. Justifique.
(d) Determine o sistema de forças, composto por um binário de momento $\vec{M}$ e uma força aplicada em *B*, a ser adicionado ao sistema original, de forma a equilibrar a barra.

$(\vec{F}_1, C)$ $\vec{F}_1 = +Q\vec{j}$
$(\vec{F}_2, H)$ $\vec{F}_2 = -Q\vec{j} + Q\vec{k}$
$(\vec{F}_3, D)$ $\vec{F}_3 = +Q\vec{i} + Q\vec{j}$



Solução:

a) $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (Q\vec{j}) + (-Q\vec{j} + Q\vec{k}) + (Q\vec{i} + Q\vec{j})$

$$\boxed{\vec{R} = Q\vec{i} + Q\vec{j} + Q\vec{k}}$$

b) $\vec{M}_A = (C - A) \wedge \vec{F}_1 + (H - A) \wedge \vec{F}_2 + (D - A) \wedge \vec{F}_3$

$$\vec{M}_A = (2a\vec{i} + a\vec{k}) \wedge (Q\vec{j}) + (2a\vec{j}) \wedge (-Q\vec{j} + Q\vec{k}) + (2a\vec{i} + 2a\vec{j} + a\vec{k}) \wedge (Q\vec{i} + Q\vec{j})$$

$$\vec{M}_A = 2aQ\vec{k} - aQ\vec{i} + 2aQ\vec{i} + 2aQ\vec{k} - 2aQ\vec{k} + aQ\vec{j} - aQ\vec{i}$$

$$\boxed{\vec{M}_A = aQ\vec{j} + 2aQ\vec{k}}$$

c) Calculando o invariante:

$$I = \vec{M}_A \cdot \vec{R} = (aQ\vec{j} + 2aQ\vec{k}) \cdot (Q\vec{i} + Q\vec{j} + Q\vec{k}) = aQ^2 + 2aQ^2 = 3aQ^2 \neq 0$$

Como o invariante é diferente de zero, o sistema não pode ser reduzido a uma única força.

d) Para que o sistema de forças adicional equilibre a barra, ele deve ter resultante e momento opostos em relação ao sistema de forças original. Devemos reduzir o sistema de forças original utilizando o pólo B. Como a resultante já foi calculada, basta determinar o momento do sistema de forças original em relação ao pólo B. Utilizando a fórmula de mudança de pólo:

$$\vec{M}_B = \vec{M}_A + (A - B) \wedge \vec{R} = aQ\vec{j} + 2aQ\vec{k} + (-a\vec{k}) \wedge (Q\vec{i} + Q\vec{j} + Q\vec{k})$$

$$\vec{M}_B = aQ\vec{j} + 2aQ\vec{k} - aQ\vec{j} + aQ\vec{i}$$

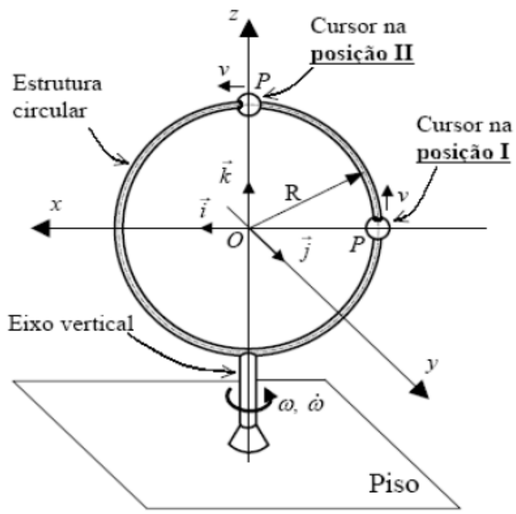
$$\vec{M}_B = aQ\vec{i} + 2aQ\vec{k}$$

Assim o novo sistema de forças que adicionado ao sistema original equilibra a barra é: $(\vec{F}, B)$ e $\vec{M}$, onde:

$$\vec{F} = -\vec{R} \quad \text{e} \quad \vec{M} = -\vec{M}_B \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{F} = -Q\vec{i} - Q\vec{j} - Q\vec{k}} \qquad \boxed{\vec{M} = -aQ\vec{i} - 2aQ\vec{k}}$$

2ª. Questão (3 pontos) – A estrutura em forma de anel circular é presa a um eixo vertical, que gira com velocidade e aceleração angulares conhecidos, $\vec{\omega} = \omega(t)\vec{k}$ e $\dot{\vec{\omega}} = \dot{\omega}\vec{k}$. Um cursor P percorre o anel com velocidade relativa de intensidade v, conhecida e constante. Use o sistema $Oxyz$, fixo no anel, para expressar as grandezas cinemáticas.

(a) Determine a velocidade do centro do cursor P, quando ele ocupa a posição I.
(b) Determine a aceleração do centro do cursor P, quando ele ocupa a posição I.
(c) Determine a velocidade do centro do cursor P, quando ele ocupa a posição II.
(d) Determine a aceleração do centro do cursor P, quando ele ocupa a posição II.



Item a) (0,5)

$$\boxed{\vec{v}_{P,rel} = v\vec{k}}$$

$$\vec{v}_{P,arr} = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (P-O) = \vec{0} + \omega\,\vec{k} \wedge \left(-R\vec{i}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{v}_{P,arr} = -\omega R\,\vec{j}}$$

$$\vec{v}_{P,abs} = \vec{v}_{P,rel} + \vec{v}_{P,arr} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{v}_{P,abs} = v\,\vec{k} - \omega R\,\vec{j}}$$

Item c) (0,5)

$$\boxed{\vec{v}_{P,rel} = v\,\vec{i}}$$

$$\vec{v}_{P,arr} = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (P-O) = \vec{0} + \omega\,\vec{k} \wedge R\,\vec{k} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{v}_{P,arr} = \vec{0}}$$

$$\vec{v}_{P,abs} = \vec{v}_{P,rel} + \vec{v}_{P,arr} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{v}_{P,abs} = v\,\vec{i}}$$

Item b)

$$\vec{v}_{P,rel} = \vec{v}_O + \vec{\Omega} \wedge (P-O) \Rightarrow v\vec{k} = \vec{0} + \Omega\,\vec{j} \wedge \left(-R\vec{i}\right)$$

$$\vec{\Omega} = \frac{v}{R}\,\vec{j} \Rightarrow \dot{\vec{\Omega}} = \vec{0}$$

$$\vec{a}_{P,rel} = \vec{a}_O + \dot{\vec{\Omega}} \wedge (P-O) + \vec{\Omega} \wedge \left[\vec{\Omega} \wedge (P-O)\right] =$$

$$= \vec{0} + \vec{0} + \frac{v}{R}\,\vec{j} \wedge \left[\frac{v}{R}\,\vec{j} \wedge \left(-R\vec{i}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{a}_{P,rel} = \frac{v^2}{R}\vec{i}} \quad \text{(0,25)}$$

$$\vec{a}_{P,arr} = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P-O) + \vec{\omega} \wedge \left[\vec{\omega} \wedge (P-O)\right] =$$

$$= \vec{0} + \dot{\omega}\,\vec{k} \wedge \left(-R\vec{i}\right) + \omega\,\vec{k} \wedge \left[\omega\,\vec{k} \wedge \left(-R\vec{i}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{a}_{P,arr} = \omega^2 R\,\vec{i} - \dot{\omega} R\,\vec{j}} \quad \text{(0,25)}$$

$$\vec{a}_{P,Cor} = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{P,rel} = 2\omega\,\vec{k} \wedge v\,\vec{k} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{P,Cor} = \vec{0}} \quad \text{(0,25)}$$

$$\boxed{\vec{a}_{P,abs} = (\omega^2 R + \frac{v^2}{R})\vec{i} - \dot{\omega} R\,\vec{j}} \quad \text{(0,25)}$$

Item d)

$$\vec{a}_{P,rel} = \vec{0} + \vec{0} + \frac{v}{R}\,\vec{j} \wedge \left[\frac{v}{R}\,\vec{j} \wedge \left(R\vec{k}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{a}_{P,rel} = -\frac{v^2}{R}\vec{k}} \quad \text{(0,25)}$$

$$\vec{a}_{P,arr} = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P-O) + \vec{\omega} \wedge \left[\vec{\omega} \wedge (P-O)\right] =$$

$$= \vec{0} + \dot{\omega}\,\vec{k} \wedge R\,\vec{k} + \omega\,\vec{k} \wedge \left(\omega\,\vec{k} \wedge R\,\vec{k}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{a}_{P,arr} = \vec{0}} \quad \text{(0,25)}$$

$$\vec{a}_{P,Cor} = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{P,rel} = 2\omega\,\vec{k} \wedge v\,\vec{i} \Rightarrow$$

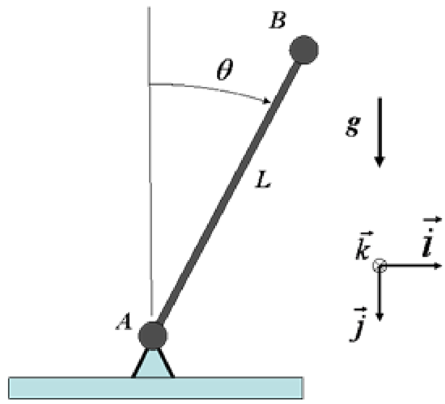
$$\boxed{\vec{a}_{P,Cor} = 2\omega v\,\vec{j}} \quad \text{(0,25)}$$

$$\vec{a}_{P,abs} = \vec{a}_{P,rel} + \vec{a}_{P,arr} + \vec{a}_{P,Cor} = \vec{0} + \vec{0} + 2\omega v\,\vec{j} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{a}_{P,abs} = 2\omega v\,\vec{j} - \frac{v^2}{R}\vec{k}} \quad \text{(0,25)}$$

3ª. Questão (4 pontos) – Um sólido é composto por uma barra homogênea AB, de comprimento L e massa $3M$ e duas pequenas esferas (pontuais) de massa M cada uma, fixadas nas extremidades A e B. O sólido, é articulado sem atrito em A e é liberado do repouso, da posição $\theta = 30^0$. Pede-se:

(a) O momento de inércia do sólido em relação ao eixo paralelo ao versor $\vec{k}$ e que passa por A.
(b) A velocidade angular do sólido em função de θ. Use o Teorema da Energia Cinética.
(c) O diagrama de corpo livre do sólido, no instante da liberação.
(d) A aceleração angular do sólido, neste instante.
(e) As reações da articulação A, aplicadas no sólido, neste instante.



Solução:

Item (a)

$$J_{Az} = \underbrace{\frac{(3M)L^2}{12} + (3M)\left(\frac{L}{2}\right)^2}_{barra} + \underbrace{M\,0^2 + ML^2}_{pontos\ materiais} = \frac{3ML^2}{12} + \frac{3ML^2}{4} + ML^2 = \frac{3ML^2 + 9ML^2 + 12ML^2}{12} = \frac{24ML^2}{12}$$

$$J_{Az} = 2ML^2$$

Item (b)

Energia cinética:

$$E = \frac{J_{Az}\dot{\theta}^2}{2} = \frac{2ML^2}{2}\dot{\theta}^2 = ML^2\dot{\theta}^2$$

Trabalho da força peso:

$$W = 5Mg\left[\frac{L}{2}\left(\cos 30^o - \cos\theta\right)\right] = 5Mg\left[\frac{L}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos\theta\right)\right]$$

Teorema da energia cinética (o sólido parte do repouso):

$$E - E_0 = W \Rightarrow E - 0 = W$$

$$ML^2\dot{\theta}^2 = 5Mg\left[\frac{L}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos\theta\right)\right]$$

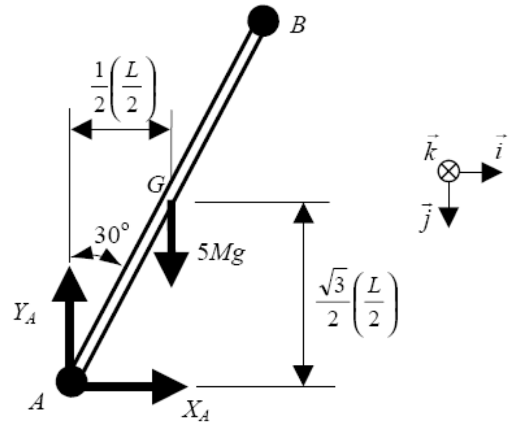
$$\dot{\theta}^2 = \frac{5Mg\left[\frac{L}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos\theta\right)\right]}{ML^2}$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{5g\left(\sqrt{3} - 2\cos\theta\right)}{4L}$$

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{5g\left(\sqrt{3} - 2\cos\theta\right)}{4L}}$$

Item (c)

Pela simetria, o baricentro do sólido está no centro da barra, e pelo enunciado, a massa do sólido é $5M$.



Item (d)

Teorema do Momento Angular:

$$J_{Az}\dot{\omega} = (5Mg)\left(\frac{L}{4}\right) \Rightarrow 2ML^2\dot{\omega} = \frac{5}{4}MgL \Rightarrow \dot{\omega} = \frac{5g}{8L}$$

Item (e)

Teorema do Movimento do Baricentro:

$$(5M)\vec{a}_G = X_A\vec{i} + (-Y_A + 5Mg)\vec{j} \qquad \text{(I)}$$

Pela cinemática:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \wedge (G - A) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G - A)]$$

Como $\dot{\omega}$ é no sentido horário, $\dot{\vec{\omega}} = \frac{5g}{8L}\vec{k}$, e considerando que o ponto A é fixo e que logo após a liberação da barra temos $\vec{\omega} = \vec{0}$:

$$\vec{a}_G = \frac{5g}{8L}\vec{k} \wedge \left(\frac{L}{4}\vec{i} - \frac{\sqrt{3}L}{4}\vec{j}\right)$$

$$\vec{a}_G = \frac{5\sqrt{3}g}{32}\vec{i} + \frac{5g}{32}\vec{j}$$

$$(5M)\vec{a}_G = \frac{5M5\sqrt{3}g}{32}\vec{i} + \frac{5M5g}{32}\vec{j}$$

$$(5M)\vec{a}_G = \frac{25\sqrt{3}}{32}Mg\vec{i} + \frac{25}{32}Mg\,\vec{j} \qquad \text{(II)}$$

Comparando (I) e (II):

$$X_A = \frac{25\sqrt{3}}{32}Mg$$

$$-Y_A + 5Mg = \frac{25}{32}Mg \Rightarrow Y_A = \frac{135}{32}Mg$$

$$\vec{X}_A = \frac{25\sqrt{3}}{32}Mg\,\vec{i}$$

$$\vec{Y}_A = -\frac{135}{32}Mg\,\vec{j}$$