ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

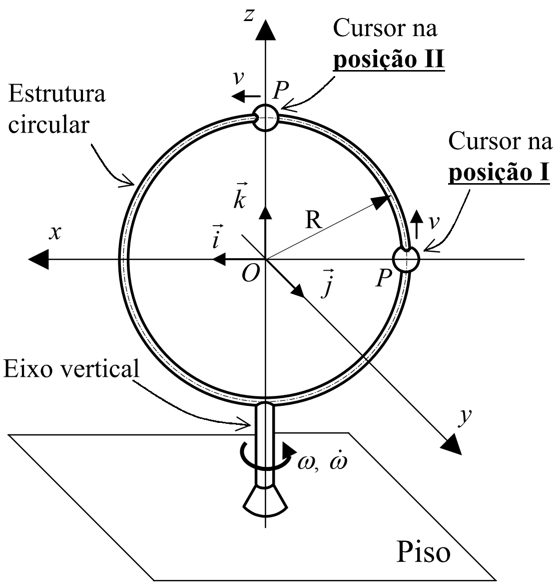
# PME2100 – Mecânica A

Prova de Recuperação – 17 de fevereiro de 2004 – Duração: 100 minutos

**Importante: não é permitido o uso de calculadoras**

## Gabarito

**(3,0 pontos) 1 –** A estrutura circular está presa em um eixo vertical, seu vetor de rotação é $\vec\omega = \omega\vec k$, e seu vetor aceleração angular é $\dot{\vec\omega} = \dot\omega\vec k$, ambos conhecidos. Um cursor percorre a estrutura circular com velocidade relativa *v*, conhecida e de módulo constante. Use o sistema *Oxyz*, fixo na estrutura circular, para expressar as grandezas cinemáticas.




a) Considerando o instante em que o cursor está na **posição I**, determine a velocidade do centro *P* do cursor.

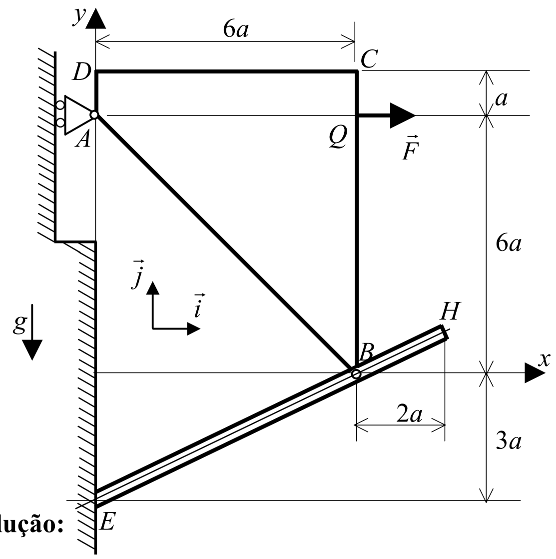
b) Considerando o instante em que o cursor está na **posição I**, determine a aceleração do centro *P* do cursor.

c) Considerando o instante em que o cursor está na **posição II**, determine a velocidade do centro *P* do cursor.

d) Considerando o instante em que o cursor está na **posição II**, determine a aceleração do centro *P* do cursor.

**Solução:**

| **Item a) (0,5)** | **Item c) (0,5)** |
|---|---|
| $\boxed{\vec v_{P,rel} = v\vec k}$<br>$\vec v_{P,arr} = \vec v_O + \vec\omega\wedge(P-O) = \vec 0 + \omega\vec k\wedge(-R\vec i) \Rightarrow$<br>$\boxed{\vec v_{P,arr} = -\omega R\vec j}$<br>$\vec v_{P,abs} = \vec v_{P,rel} + \vec v_{P,arr} \Rightarrow$<br>$\boxed{\vec v_{P,abs} = v\vec k - \omega R\vec j}$ | $\boxed{\vec v_{P,rel} = v\vec i}$<br>$\vec v_{P,arr} = \vec v_O + \vec\omega\wedge(P-O) = \vec 0 + \omega\vec k\wedge R\vec k \Rightarrow$<br>$\boxed{\vec v_{P,arr} = \vec 0}$<br>$\vec v_{P,abs} = \vec v_{P,rel} + \vec v_{P,arr} \Rightarrow$<br>$\boxed{\vec v_{P,abs} = v\vec i}$ |
| **Item b)** | **Item d)** |
| $\vec v_{P,rel} = \vec v_O + \vec\Omega\wedge(P-O) \Rightarrow v\vec k = \vec 0 + \Omega\vec j\wedge(-R\vec i)$<br>$\vec\Omega = \frac{v}{R}\vec j \Rightarrow \dot{\vec\Omega} = \vec 0$<br>$\vec a_{P,rel} = \vec a_O + \dot{\vec\Omega}\wedge(P-O) + \vec\Omega\wedge[\vec\Omega\wedge(P-O)] =$<br>$= \vec 0 + \vec 0 + \frac{v}{R}\vec j\wedge\left[\frac{v}{R}\vec j\wedge(-R\vec i)\right] \Rightarrow$<br>$\boxed{\vec a_{P,rel} = \frac{v^2}{R}\vec i}$ **(0,25)**<br>$\vec a_{P,arr} = \vec a_O + \dot{\vec\omega}\wedge(P-O) + \vec\omega\wedge[\vec\omega\wedge(P-O)] =$<br>$= \vec 0 + \dot\omega\vec k\wedge(-R\vec i) + \omega\vec k\wedge[\omega\vec k\wedge(-R\vec i)] \Rightarrow$<br>$\boxed{\vec a_{P,arr} = \omega^2 R\vec i - \dot\omega R\vec j}$ **(0,25)**<br>$\vec a_{P,Cor} = 2\vec\omega\wedge\vec v_{P,rel} = 2\omega\vec k\wedge v\vec k \Rightarrow \boxed{\vec a_{P,Cor} = \vec 0}$ **(0,25)**<br>$\boxed{\vec a_{P,abs} = (\omega^2 R + \frac{v^2}{R})\vec i - \dot\omega R\vec j}$ **(0,25)** | $\vec a_{P,rel} = \vec 0 + \vec 0 + \frac{v}{R}\vec j\wedge\left[\frac{v}{R}\vec j\wedge(R\vec k)\right] \Rightarrow$<br>$\boxed{\vec a_{P,rel} = -\frac{v^2}{R}\vec k}$ **(0,25)**<br>$\vec a_{P,arr} = \vec a_O + \dot{\vec\omega}\wedge(P-O) + \vec\omega\wedge[\vec\omega\wedge(P-O)] =$<br>$= \vec 0 + \dot\omega\vec k\wedge R\vec k + \omega\vec k\wedge(\omega\vec k\wedge R\vec k) \Rightarrow$<br>$\boxed{\vec a_{P,arr} = \vec 0}$ **(0,25)**<br>$\vec a_{P,Cor} = 2\vec\omega\wedge\vec v_{P,rel} = 2\omega\vec k\wedge v\vec i \Rightarrow$<br>$\boxed{\vec a_{P,Cor} = 2\omega v\vec j}$ **(0,25)**<br>$\vec a_{P,abs} = \vec a_{P,rel} + \vec a_{P,arr} + \vec a_{P,Cor} = \vec 0 + \vec 0 + 2\omega v\vec j \Rightarrow$<br>$\boxed{\vec a_{P,abs} = 2\omega v\vec j - \frac{v^2}{R}\vec k}$ **(0,25)** |




**(3,5 pontos) 2 –** A placa *ABCDA* é homogênea e tem peso $8P/3$. Ela é suportada por um apoio em *A* e por uma articulação em *B*. A barra *EH* é homogênea e tem peso *P*. Ela está engastada na parede em *E*, e suporta a articulação em *B*. Há uma força $\vec{F} = F\vec{i}$ aplicada na placa em *Q*.

a) Determine o baricentro *G* da placa *ABCDA*.

b) Determine as forças que agem na placa *ABCDA*.

c) Determine as reações do engastamento em *E*.

**Solução:**

**Item a)**

( I ) Retângulo ADCQ: $Área = 6a^2$; $x_{GI} = 3a$ e $y_{GI} = \dfrac{13a}{2}$.

( II ) Triângulo ABQ: $Área = 18a^2$; $x_{GII} = 4a$ e $y_{GII} = 4a$.

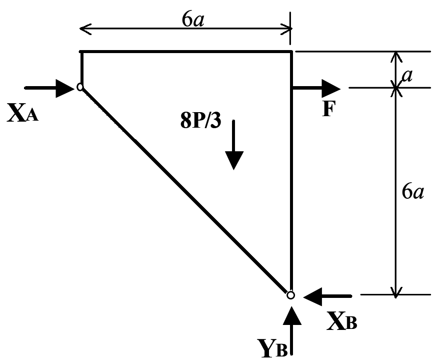
Portanto:

$$x_G = \frac{m_I x_{GI} + m_{II} x_{GII}}{m_I + m_{II}} \Rightarrow x_G = \frac{6a^2(3a) + 18a^2(4a)}{24a^2} \Rightarrow \boxed{x_G = \frac{15a}{4}} \ \textbf{(0,5)}$$

$$y_G = \frac{m_I y_{GI} + m_{II} y_{GII}}{m_I + m_{II}} \Rightarrow y_G = \frac{6a^2(13a/2) + 18a^2(4a)}{24a^2} \Rightarrow \boxed{y_G = \frac{37a}{8}} \ \textbf{(0,5)}$$

**Item b)**

Diagrama de Corpo Livre da Placa:




**(0,5)**

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow X_A + F = X_B$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \boxed{Y_B = \frac{8P}{3}} \ \textbf{(0,25)}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \frac{8P}{3}\left(\frac{15a}{4}\right) + X_B(6a) = Y_B(6a) \Rightarrow$$

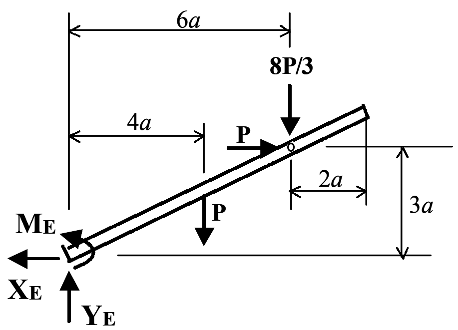
$$6X_B = 16P - 10P \Rightarrow$$

$$\boxed{X_B = P} \ \textbf{(0,25)}$$

e, finalmente:

$$\boxed{X_A = P - F} \ \textbf{(0,25)}$$

**Item c)**




**(0,5)**

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{X_E = P} \ \textbf{(0,25)}$$

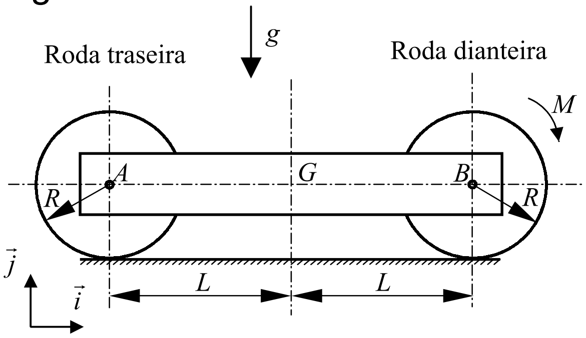
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow Y_E = \frac{8P}{3} + P \Rightarrow \boxed{Y_E = \frac{11P}{3}} \ \textbf{(0,25)}$$

$$\sum M_E = 0 \Rightarrow M_E = \frac{8P}{3}(6a) + P(4a) + P(3a) \Rightarrow$$

$$\boxed{M_E = 23Pa} \ \textbf{(0,25)}$$

# ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

## Departamento de Engenharia Mecânica




**(3,5 pontos) 3 –** Considere o modelo simplificado de carro composto por duas rodas (discos homogêneos de raio $R$, cada um com massa $m$ e momento de inércia $J_z = mR^2/2$) e uma placa retangular (homogênea, de massa $2m$), conforme mostra a figura. Cada roda é articulada pelo seu centro na placa. Na roda dianteira é aplicado um momento $M$ constante. Pede-se:

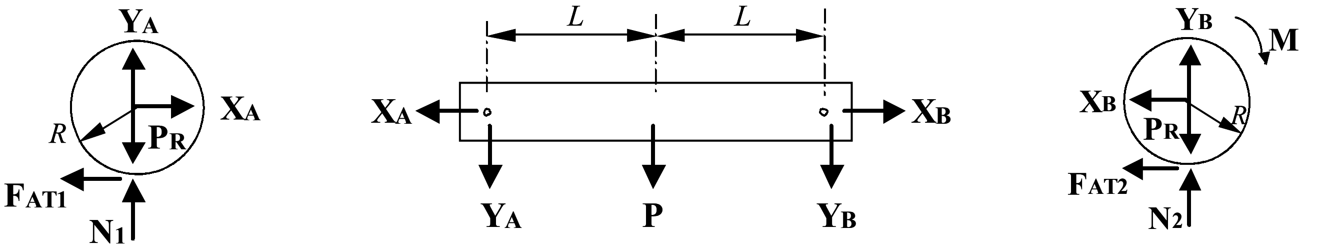
a) O diagrama de corpo livre da placa e o diagrama de corpo livre de cada roda.

b) A aceleração do baricentro $G$ do carro, supondo que não haja escorregamento entre as rodas e o solo.

**Solução:**

**Item a)**

Diagrama de Corpo Livre da PLACA e de cada uma das RODAS:




**(0,5)** **(0,5)** **(0,5)**

**Item b)**

**(*) +(**)+(***)=(0,5)**

Sabendo que: $\vec{a}_1 = \vec{a}_2 = \vec{a}_{Gx} = a_{Gx}\,\vec{i}$ , bem com: $\dot{\vec{\omega}}_1 = \dot{\vec{\omega}}_2 = \dot{\vec{\omega}}$ . **(*)**

Então, pode-se aplicar o TMA à RODA 1, obtendo:

$J\dot{\omega} = X_A R \Rightarrow X_A = \dfrac{J\dot{\omega}}{R}$ (b1) **(0,5)**

Analogamente, aplicando o TMA à RODA 2:

$J\dot{\omega} = M - X_B R \Rightarrow X_B = \dfrac{M - J\dot{\omega}}{R}$ (b2) **(0,5)**

Para que não haja escorregamento: $\vec{V}_C = \vec{V}_D = \vec{0} \Rightarrow \vec{V}_A = \vec{V}_B = \omega R\,\vec{i}$ .

Derivando em relação ao tempo: $\vec{a}_A = \vec{a}_B = \vec{a}_{Gx} = \dot{\omega} R\,\vec{i} \Rightarrow \dot{\omega} = \dfrac{a_{Gx}}{R}$ (b3) **(**)**

Aplicando o TMB à PLACA:

$\sum F_x = 2ma_{Gx} \Rightarrow X_B - X_A = 2ma_{Gx}$ (b4) **(0,5)**

Substituindo (b1), (b2) e (b3) em (b4):

$$\frac{M}{R} - \frac{2Ja_{Gx}}{R^2} = 2ma_{Gx}$$

Como: $J = \dfrac{mR^2}{2} + mR^2 = \dfrac{3mR^2}{2} \Rightarrow \dfrac{M}{R} - 3ma_{Gx} = 2ma_{Gx}$

Portanto:

$\boxed{a_{Gx} = \dfrac{M}{5mR}}$ e $\boxed{a_{Gy} = 0}$ **(***)**