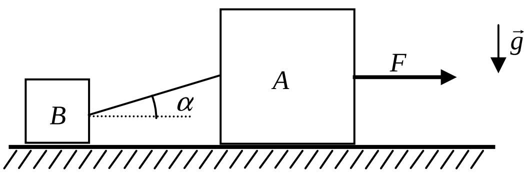
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

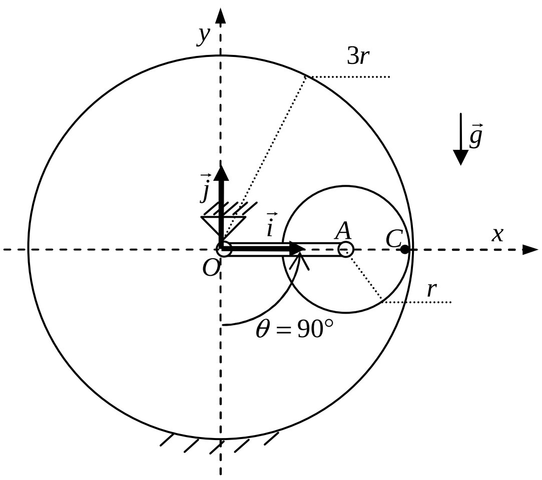
Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 – MECÂNICA 1 (Reoferecimento) – Terceira Prova – 28 de junho de 2018 – Duração: 110 minutos
(não é permitido o uso de celulares, *tablets*, calculadoras e dispositivos similares)

1ª Questão (3,0 pontos). Dois blocos A e B, de massas m_A e m_B, estão ligados por uma corda inextensível, movendo-se sobre um plano horizontal sob a ação de uma força $\vec{F} = F\vec{i}$ aplicada ao bloco A. Sabe-se que o coeficiente de atrito cinético entre o plano horizontal e as superfícies dos blocos é μ e que a corda se rompe quando sujeita a uma tração de módulo T_r. Considerando a condição limite em que a corda está na iminência de se romper, pede-se:



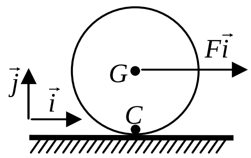
(a) desenhar os diagramas de corpo livre dos blocos;
(b) determinar a aceleração dos blocos;
(c) determinar F.



2ª Questão (3,5 pontos). Um disco de massa m e raio r, articulado pelo seu centro A a uma barra OA de massa m e comprimento $2r$, rola sem escorregar sobre a superfície interna de uma pista fixa em forma de aro circular. O sistema parte do repouso quando a barra está alinhada com a direção horizontal ($\theta = 90°$). A base de versores $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ mostrada na figura é ligada à barra OA.
Para um ângulo θ arbitrário ($-90° < \theta < 90°$), pede-se:

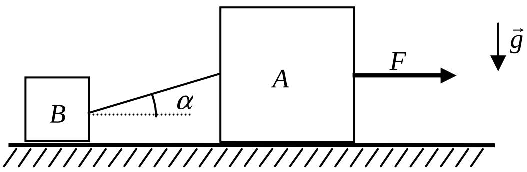
(a) determinar a relação entre as velocidades angulares do disco (ω) e da barra (Ω) e entre as acelerações angulares do disco ($\dot{\omega}$) e da barra ($\dot{\Omega}$);
(b) desenhar os diagramas de corpo livre do disco e da barra;
(c) indicar as forças que realizam trabalho nulo, apresentando as devidas justificativas;
(d) escrever a expressão geral da energia cinética do sistema;
(e) determinar a velocidade angular do disco;
(f) determinar a aceleração angular do disco.

3ª Questão (3,5 pontos). Um disco homogêneo move-se sobre uma pista plana horizontal sob a ação de uma força $\vec{F} = F\vec{i}$ passante pelo seu centro de massa. O coeficiente de atrito entre as superfícies do disco e da pista é μ. Supondo-se que o movimento do disco seja de rolamento sem deslizamento, pede-se:



(a) desenhar o diagrama de corpo livre do disco;
(b) determinar a aceleração angular do disco e a velocidade do seu centro de massa;
(c) determinar as componentes horizontal e vertical da força de contato entre o disco e a pista;
(d) estabelecer a condição que deve ser satisfeita para que o movimento hipoteticamente realizado pelo disco – rolamento sem deslizamento – seja possível.

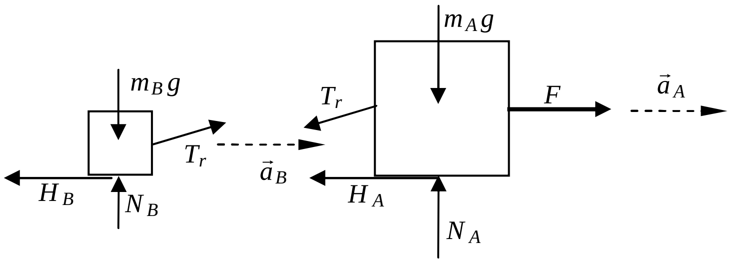
1ª Questão (3,0 pontos). Dois blocos A e B, de massas m_A e m_B, estão ligados por uma corda inextensível, movendo-se sobre um plano horizontal sob a ação de uma força $\vec{F} = F\vec{i}$ aplicada ao bloco A. Sabe-se que o coeficiente de atrito cinético entre o plano horizontal e as superfícies dos blocos é μ e que a corda se rompe quando sujeita a uma tração de módulo T_r. Considerando a condição limite em que a corda está na iminência de se romper, pede-se:



(d) desenhar os diagramas de corpo livre dos blocos;
(e) determinar a aceleração dos blocos;
(f) determinar F.

RESOLUÇÃO

Os diagramas de corpo livre dos blocos A e B são apresentados na figura ao lado:



(1 ponto)

Aplicando-se, para cada um dos blocos, o Teorema da Resultante, obtêm-se:

- Bloco A

$$F - T_r \cos\alpha - H_A = m_A a_A \tag{1}$$

$$N_A - m_A g - T_r \sin\alpha = 0 \tag{2}$$

- Bloco B

$$T_r \cos\alpha - H_B = m_B a_B \tag{3}$$

$$N_B + T_r \sin\alpha - m_B g = 0 \tag{4}$$

As leis de atrito de Coulomb fornecem:

$$H_A = \mu N_A \tag{5}$$

$$H_B = \mu N_B \tag{6}$$

Como a corda é inextensível, tem-se:

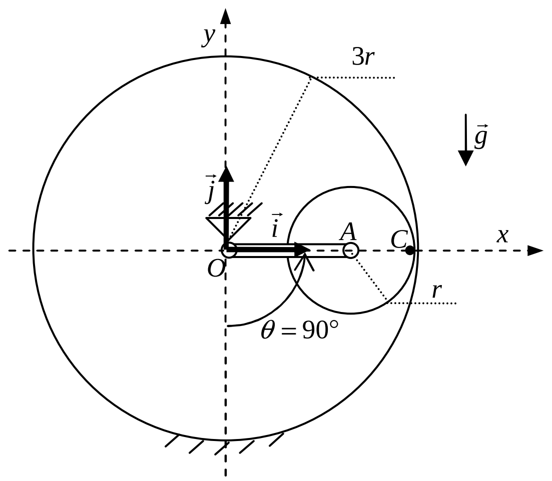
$$a_A = a_B \tag{7}$$

(1½ ponto)

Resolvendo-se o sistema de equações 1-7, obtêm-se:

$$a_A = a_B = \frac{1}{m_B}\left[T_r \cos\alpha + \mu\left(T_r \sin\alpha - m_B g\right)\right]$$

$$F = \frac{m_A + m_B}{m_B}\left(\cos\alpha + \mu \sin\alpha\right)T_r$$ **(½ ponto)**



2ª Questão (3,5 pontos). Um disco de massa m e raio r, articulado pelo seu centro A a uma barra OA de massa m e comprimento $2r$, rola sem escorregar sobre a superfície interna de uma pista fixa em forma de aro circular. O sistema parte do repouso quando a barra está alinhada com a direção horizontal ($\theta = 90°$). A base de versores $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ mostrada na figura é ligada à barra OA.

Para um ângulo θ arbitrário ($-90° < \theta < 90°$), pede-se:

(g) determinar a relação entre as velocidades angulares do disco (ω) e da barra (Ω) e entre as acelerações angulares do disco ($\dot{\omega}$) e da barra ($\dot{\Omega}$);

(h) desenhar os diagramas de corpo livre do disco e da barra;

(i) indicar as forças que realizam trabalho nulo, apresentando as devidas justificativas;

(j) escrever a expressão geral da energia cinética do sistema;

(k) determinar a velocidade angular do disco;

(l) determinar a aceleração angular do disco.

RESOLUÇÃO

Como o disco rola sem escorregar, o ponto C pertencente ao disco coincide com o seu CIR. Sendo ω a velocidade angular do disco, a velocidade do ponto A pertencente ao disco é:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_C + \omega\vec{k} \wedge \left(-r\vec{i}\right) = \vec{0} - \omega r\vec{j} = \omega r\vec{j} \tag{1}$$

Sendo Ω a velocidade angular da barra, a velocidade do ponto A pertencente a essa barra, é:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_O + \left(-\Omega\vec{k}\right) \wedge 2r\vec{i} = -2\Omega r\vec{j} \tag{2}$$

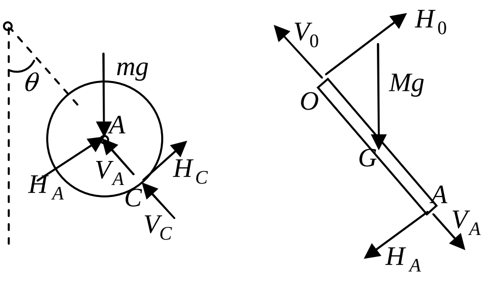
Igualando-se as duas expressões de $\vec{v}_A$ acima indicadas, resulta:

$$\Omega = -\frac{1}{2}\omega \tag{3}$$

Como o movimento é plano e o parâmetro r é independente de θ, a relação entre as acelerações angulares do disco e da barra é dada, simplesmente, por:

$$\dot{\Omega} = -\frac{1}{2}\dot{\omega} \tag{4}$$

(½ ponto)



Os diagramas de corpo livre do disco e da barra, para uma posição θ arbitrária, são apresentados nas figuras à esquerda.

(1 ponto)

Analisando-se o trabalho realizado pelas forças atuantes no sistema, notamos que:

- As componentes V_O, H_O da reação $\vec{R}_O$ em O não realizam trabalho, pois O é um ponto fixo.

- As componentes V_C, H_C da reação $\vec{R}_C = H_C\vec{i} + V_C\vec{j}$ em C, não realizam trabalho, pois esse ponto coincide com o CIR; logo, o trabalho elementar realizado por $\vec{R}_C$, é:

  $d\tau_{\vec{R}_C} = \left(H_C\vec{i} + V_c\vec{j}\right)\cdot\vec{v}_C dt = \left(H_C\vec{i} + V_c\vec{j}\right)\cdot\vec{0}dt = 0$.

- As reações no contato disco/barra (pontos $A \in disco$ e $A' \in barra$) têm mesmo módulo, mesma direção e sentidos opostos; como o deslocamento relativo entre A e A' é nulo durante todo o movimento, o trabalho realizado por esse par de forças é nulo.

(½ ponto)

A energia cinética do sistema barra+disco, para uma posição angular genérica θ, é:

$$T(\theta) = \frac{1}{2}J_C^{disco}\omega^2(\theta) + \frac{1}{2}J_O^{barra}\Omega^2(\theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{mr^2}{2} + mr^2\right)\omega^2(\theta) + \frac{1}{2}\frac{m(2r)^2}{3}\Omega^2(\theta) = \frac{3}{4}mr^2\omega^2(\theta) + \frac{2}{3}mr^2\Omega^2(\theta) \qquad (5)$$

Substituindo-se (3) em (5), resulta:

$$T(\theta) = \frac{3}{4}mr^2\omega^2(\theta) + \frac{2}{3}mr^2\left(\frac{\omega(\theta)}{2}\right)^2 = \frac{11}{12}mr^2\omega^2(\theta) \qquad (6)$$

(½ ponto)

Aplicando-se o Teorema da Energia Cinética entre os instantes inicial e o instante t para o qual a barra forma um ângulo $-90° < \theta < 90°$ com a vertical, tem-se:

$$T(\theta) - T(0) = \frac{11}{12}mr^2\omega^2(\theta) = mgr\cos\theta + mg2r\cos\theta = 3mgr\cos\theta\,,$$

ou seja,

$$\omega(\theta) = \sqrt{\frac{36}{11}\frac{g}{r}\cos\theta} \qquad (7)$$

(½ ponto)

Elevando-se ao quadrado a expressão anterior e efetuando-se a sua derivação, resulta:

$$\frac{d}{dt}\omega^2(\theta) = \frac{d}{dt}\left(\frac{36}{11}\frac{g}{r}\cos\theta\right) \Rightarrow 2\omega(\theta)\cdot\dot{\omega}(\theta) = -\frac{36}{11}\frac{g}{r}\sin\theta\cdot\dot{\theta} = -\frac{36}{11}\frac{g}{r}\sin\theta\cdot\omega(\theta)\,,$$

ou seja,

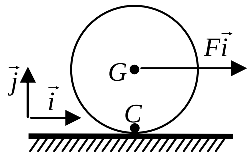
$$\dot{\omega}(\theta) = -\frac{18}{11}\frac{g}{r}\sin\theta$$

(½ ponto)

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

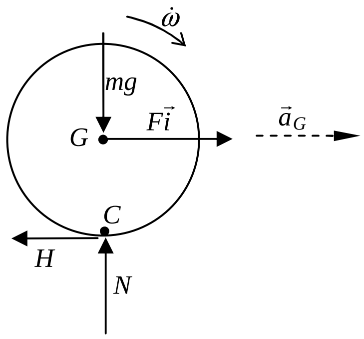
Departamento de Engenharia Mecânica

3ª Questão (3,5 pontos). Um disco homogêneo move-se sobre uma pista plana horizontal sob a ação de uma força $\vec{F} = F\vec{i}$ passante pelo seu centro de massa. O coeficiente de atrito cinético entre as superfícies do disco e da pista é μ. Supondo-se que o movimento do disco seja de rolamento sem deslizamento, pede-se:



(a) desenhar o diagrama de corpo livre do disco;
(b) determinar a aceleração angular do disco e a aceleração do seu centro de massa;
(c) determinar as componentes horizontal e vertical da força de contato entre o disco e a pista;
(d) estabelecer a condição que deve ser satisfeita para que o movimento hipoteticamente realizado pelo disco – rolamento sem deslizamento – seja possível.

RESOLUÇÃO



O diagrama de corpo livre do disco é apresentado na figura ao lado.

(½ ponto)

Do Teorema da Resultante, obtêm-se:

$$F - H = ma_G \tag{1}$$

$$N - mg = 0 \tag{2}$$

Do Teorema do Momento da Quantidade de Movimento (ou da Quantidade de Movimento Angular), resulta:

$$J_C\left(-\dot{\omega}\vec{k}\right) = -Fr\vec{k} \Rightarrow -\frac{3}{2}mr^2\dot{\omega} = -Fr$$

ou seja:

$$\dot{\omega} = \frac{2}{3}\frac{F}{mr} \tag{3}$$

(½ ponto)

Como o disco rola sem escorregar, tem-se:

$$\vec{v}_G = \vec{v}_C - \omega\vec{k} \wedge (G - C) = \vec{0} - \omega\vec{k} \wedge r\vec{j} = \omega r\vec{i} \tag{4}$$

Como a trajetória do centro de massa do disco é uma reta paralela ao traço da pista horizontal no plano do movimento, tem-se:

$$\vec{a}_G = \frac{d}{dt}\vec{v}_G = \frac{d}{dt}\left(\omega r\vec{i}\right) = \dot{\omega}r\vec{i} = \frac{2}{3}\frac{F}{mr}r\vec{i} = \frac{2}{3}\frac{F}{m}\vec{i} \tag{5}$$

(½ ponto)

Substituindo-se (5) em (1), obtém-se:

$$F - H = m\left(\frac{2}{3}\frac{F}{m}\right) = \frac{2}{3}F$$

ou seja,

$$H = \frac{F}{3}$$ **(1 ponto)**

Para que o disco role sem deslizar sobre a pista é necessário que

$$H = \frac{F}{3} < \mu N = \mu mg \ ,$$

ou seja,

$$F < 3\mu mg$$ **(1 ponto)**