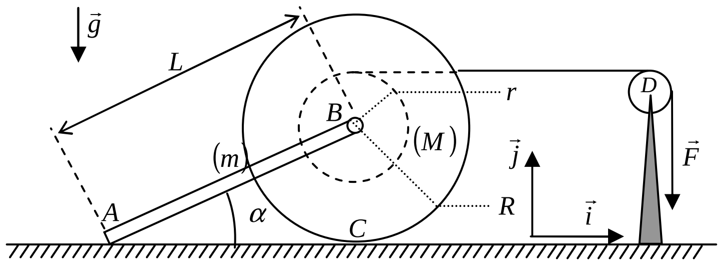
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 – MECÂNICA 1 – Terceira Prova – 05 de julho de 2017 - Duração da Prova: 110 minutos
(não é permitido o uso de celulares, *tablets*, calculadoras e dispositivos similares)

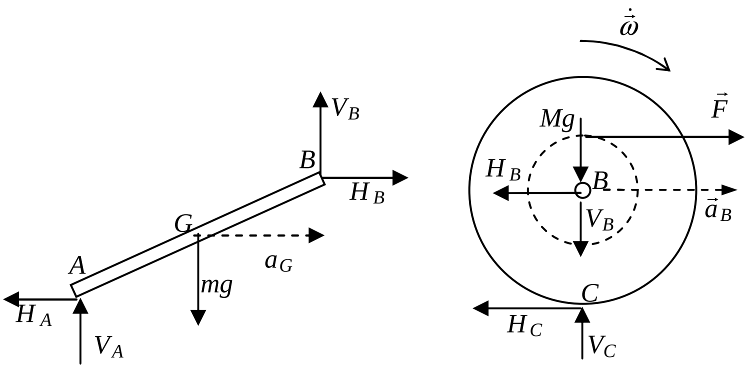
1ª Questão (3,5 pontos). Um carretel de massa M, centro B e raios R (externo) e r (interno) está articulado a uma barra AB de massa m e comprimento $L = 2R$, conforme indicado na figura. Mediante a aplicação de uma força F (constante) a um cabo inextensível e de massa desprezível enrolado ao carretel, faz-se com que este role sem deslizar sobre um plano horizontal, arrastando consigo a barra AB. A polia de centro D tem massa desprezível e o coeficiente de atrito entre as superfícies da barra AB e a do plano horizontal é μ. C é o ponto de contato do carretel com o plano horizontal. O momento de inércia do carretel em relação ao eixo Bz é dado: $J_{Bz} = J$. Pede-se:



(a) desenhar os diagramas de corpo livre do carretel e da barra;
(b) determinar o momento de inércia do carretel em relação ao eixo Cz;
(c) expressar as acelerações do baricentro da barra e do baricentro do carretel em função da aceleração angular do carretel;
(d) escrever as equações dos teoremas do movimento do baricentro (*TMB*) e do momento da quantidade de movimento (*TMQM* ou *TQMA*, se se utilizar a terminologia 'Teorema da Quantidade de Movimento Angular) para o carretel e para a barra.

RESOLUÇÃO

Os diagramas de corpo livre do carretel e da barra são apresentados nas figuras abaixo.



(1 ponto)

O momento de inércia do carretel em relação ao eixo Cz é:

$$J_{Cz} = J_{Bz} + MR^2 = J + MR^2$$ **(½ ponto)**

O sistema carretel+barra está sujeito aos seguintes vínculos cinemáticos:

$$a_G = a_B \quad (1)$$
$$a_B = \dot{\omega}R \quad (2)$$ **(½ ponto)**

As equações que governam o movimento do disco são:

$F - H_B - H_C = Ma_B$ (3)

$V_C - V_B - Mg = 0$ (4)

$-\left(J + MR^2\right)\dot{\omega} = -F(R+r) + H_B r$ (5) **(½ ponto)**

Notando que a força de atrito no contato barra/plano horizontal é

$H_A = \mu V_A$, **(½ ponto)**

as equações que governam o movimento da barra, são:

$H_B - \mu V_A = ma_G$ (6)

$V_B + V_A - mg = 0$ (7)

$M_G = -\mu V_A \frac{R}{2} - H_{\mathbf{B}} \frac{R}{2} - V_A \frac{R\sqrt{3}}{2} + V_B \frac{R\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow V_A\left(\mu + \sqrt{3}\right) + H_{\mathbf{B}} - V_B\sqrt{3} = 0$ (8) **(½ ponto)**

As incógnitas do sistema de equações algébricas (1) a (8) são:

$V_A, H_B, V_B, H_C, V_C, a_G, a_B, \dot{\omega}$

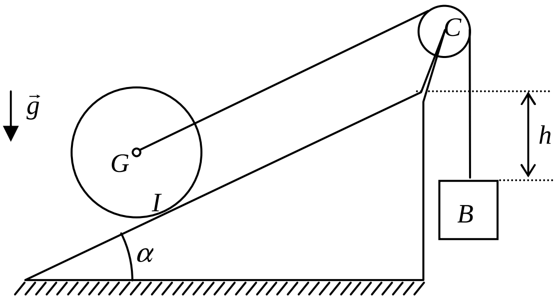
Substituindo-se (1) e (2) nas equações (3) a (8) chega-se ao seguinte sistema determinado de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -Mr \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ r & 0 & 0 & 0 & 0 & -\left(J + MR^2\right) \\ 1 & 0 & -\mu & 0 & 0 & -mR \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\sqrt{3} & \mu + \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_B \\ V_B \\ V_A \\ H_C \\ V_C \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F \\ Mg \\ F(R+r) \\ 0 \\ mg \\ 0 \end{bmatrix}$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 – MECÂNICA 1 – Terceira Prova – 05 de julho de 2017 - Duração da Prova: 110 minutos
(não é permitido o uso de celulares, *tablets*, calculadoras e dispositivos similares)



2ª Questão (3,5 pontos). Um disco de massa m, raio r e centro G, rola sem deslizar sobre um plano inclinado, sendo I o ponto de contato. O disco é tracionado por um cabo inextensível, de massa desprezível, ligado por meio de uma polia a um bloco de massa m. No instante inicial, o sistema está em repouso e $h = 0$. Sabendo que a polia de centro C tem massa desprezível, pede-se, para o instante ilustrado na figura:

(a) a energia cinética do sistema;
(b) a velocidade v_B e a aceleração a_B do bloco em função de h;
(c) a tração T no cabo e as componentes normal e tangencial da força de contato no disco.

RESOLUÇÃO

Para um instante arbitrário, a energia cinética do sistema é dada por:

$$T = \frac{1}{2} J_{Iz}\omega^2 + \frac{1}{2} m v_B^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{mr^2}{2} + mr^2\right)\omega^2 + \frac{1}{2} m v_B^2 = \frac{3}{4} mr^2\omega^2 + \frac{1}{2} m v_B^2 \qquad (1)$$

Considerando que o disco rola sem escorregar e que o cabo é inextensível, os movimentos do bloco B e do baricentro G do disco estão vinculados por:

$$v_G = \omega r = v_B \qquad (2)$$

Substituindo-se (2) em (1), resulta:

$$T = \frac{3}{4} mr^2\omega^2 + \frac{1}{2} m(\omega r)^2 = \frac{5}{4} mr^2\omega^2$$ **(1 ponto)**

Para o sistema considerado, as únicas forças que realizam trabalho não nulo são o peso do bloco e a componente do peso do disco paralela ao plano inclinado. Assim, entre os instantes inicial e o indicado na firgura, o Teorema da Energia Cinética fornece:

$$T(t) - T(0) = \frac{5}{4} mr^2\omega^2 = mgh - mgh\sin\alpha \Rightarrow \omega = \frac{2}{5}\frac{\sqrt{5gh(1-\sin\alpha)}}{r} \qquad (3)$$ **(½ ponto)**

Derivando-se a expressão

$$\omega^2 = \frac{4}{5}\frac{gh - gh\sin\alpha}{r^2}$$

resulta:

$$2\omega\dot{\omega} = \frac{4}{5} g \frac{1-\sin\alpha}{r^2}\dot{h} = \frac{4}{5} g \frac{1-\sin\alpha}{r^2}\omega r$$

Logo, tem-se:

$$\dot{\omega} = \frac{2}{5}\left(\frac{1-\sin\alpha}{r}\right)g \qquad (4) \qquad \textbf{(½ ponto)}$$

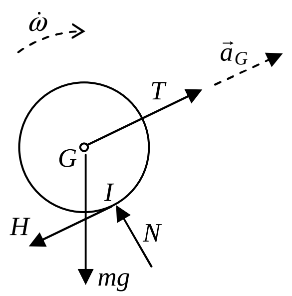
Considerando o vínculo cinemático (2), a velocidade do bloco é dada por

$$\vec{v}_B = -\omega r\vec{j} = -\frac{2}{5}\frac{\sqrt{5gh(1-\sin\alpha)}}{r}r\vec{j} = -\frac{2}{5}\sqrt{5gh(1-\sin\alpha)}\,\vec{j} \qquad (5)$$

e a sua aceleração é dada por:

$$\vec{a}_B = \frac{d}{dt}\left(-\omega r\vec{j}\right) = -\dot{\omega}r\vec{j} = -\frac{2}{5}(1-\sin\alpha)g\vec{j} \qquad (6) \qquad \textbf{(½ ponto)}$$

Na figura abaixo apresenta-se o diagrama de corpo livre do disco:



(½ ponto)

Aplicando-se ao disco o Teorema do Momento da Quantidade de Movimento, tem-se:

$$J_{Gz}\dot{\omega} = H\cdot r \Rightarrow \frac{mr^2}{2}\dot{\omega} = H\cdot r \Rightarrow H = \frac{mr}{2}\dot{\omega} \qquad (7)$$

Substituindo-se (4) em (7), tem-se:

$$H = \frac{1}{5}(1-\sin\alpha)mg \qquad (8)$$

Aplicando-se o Teorema do Movimento do Baricentro ao disco, resulta:

$$T - H - mg\sin\theta = ma_G \Rightarrow T = H + mg\sin\alpha + ma_G \qquad (9)$$

Substituindo-se em (8) e (6) em (9), resulta:

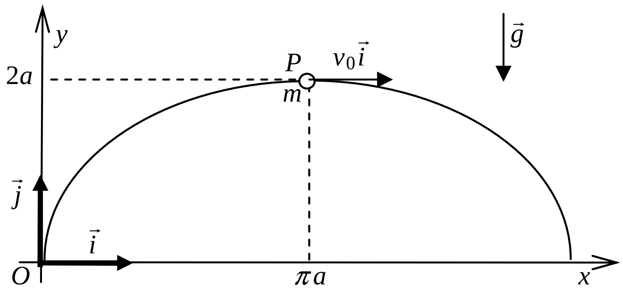
$$T = \frac{1}{5}(3+2\sin\alpha)mg \qquad (10) \qquad \textbf{(½ ponto)}$$

PME 3100 – MECÂNICA 1 – Terceira Prova – 05 de julho de 2017 - Duração da Prova: 110 minutos
(não é permitido o uso de celulares, *tablets*, calculadoras e dispositivos similares)

3ª Questão (3,0 pontos). Um pequeno anel de massa m move-se sem atrito sobre um arame cuja forma é definida pela equação vetorial

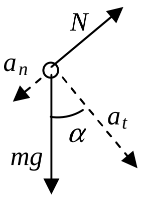
$$P - O = \vec{r} = a(\theta - \sin\theta)\vec{i} + a(1 - \cos\theta)\vec{j}$$

No instante $t = 0$ o anel parte com velocidade $\vec{v}(0) = v_0\vec{i}$ da posição mais elevada da curva, ou seja, $(x = \pi a, y = 2a)$, correspondente a $\theta = \pi$. Pede-se:



(a) desenhar o diagrama de corpo livre do anel em uma posição genérica $\pi < \theta < 2\pi$, indicando as componentes tangencial e normal da sua aceleração;
(b) utilizando o diagrama de corpo livre do item (a) escrever as equações do movimento do anel projetadas nas direções normal e tangencial;
(c) determinar a velocidade do anel no instante em instante em que se encontrar na posição correspondente a $\theta = 3\pi/2$.

RESOLUÇÃO



Na figura ao lado apresenta-se o diagrama de corpo livre do anel, para uma posição genérica $\pi < \theta < 2\pi$.

(1 ponto)

As equações diferenciais do movimento do anel, projetadas nas direções tangente e normal à trajetória, para uma posição genérica $\pi < \theta < 2\pi$ indicada no diagrama anterior, são:

- Direção $\vec{\tau}$: $mg\cos\alpha(\theta(t)) = ma_t(\theta(t))$

$$\therefore a_t(\theta(t)) = g\cos\alpha(\theta(t)) \qquad (1)$$

- Direção $\vec{n}$: $mg\sin\alpha(\theta(t)) - N(\theta(t)) = ma_n(\theta(t))$

$$\therefore N(\theta(t)) = mg\sin\alpha(\theta(t)) - m\frac{[v(\theta(t))]^2}{R(\theta(t))} \qquad (2)$$ **(1 ponto)**

onde os parâmetros geométricos $\alpha(\theta)$ e $R(\theta)$ dependem tão somente da forma do arame ao qual o anel está vinculado, ou seja:

$$\cos\alpha(\theta) = -\vec{j}\cdot\vec{\tau}(\theta) = -\vec{j}\cdot\frac{\dfrac{d\vec{r}(\theta)}{d\theta}}{\left|\dfrac{d\vec{r}(\theta)}{d\theta}\right|} \quad \text{e} \quad R(\theta) = \frac{\left|\dfrac{d\vec{r}}{d\theta}\right|^{3/2}}{\left|\dfrac{d\vec{r}(\theta)}{d\theta}\wedge\dfrac{d^2\vec{r}(\theta)}{d\theta^2}\right|}$$

Aplicando-se o Teorema da Energia Cinética entre as posições $\theta = \pi$ e $\theta = 3\pi/2$, tem-se:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + 2mga = \frac{1}{2}mv^2 + mga\left(1 - \cos\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}mv^2 + mga$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + 2ga} \qquad (3)$$ **(1 ponto)**