ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 – MECÂNICA I – P3 - reoferecimento – 22 de junho de 2016

Duração da Prova: 110 minutos

- **Não é permitido o uso de dispositivos eletrônicos, como calculadoras, "tablets" e celulares.**
- **Após a distribuição do enunciado da prova, é proibido sair da sala antes de decorridos 40 minutos.**
- **A partir do momento em que a prova for encerrada, não é permitido ao aluno escrever mais nada na folha de respostas, havendo possibilidade de anulação da respectiva prova se isto ocorrer.**

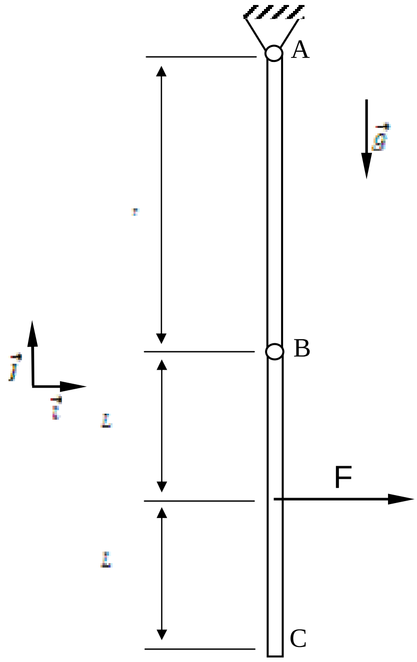
Questão 1 (5,0 pontos): O sistema ao lado é formado por duas barras homogêneas de massa ***m*** e comprimento ***L*** **($J_{Gz}=mL^2/12$)**. Em A e em B há articulações ideais. Em determinado instante o sistema, inicialmente em repouso na vertical, recebe a ação de uma força F conforme indicado. Para esse instante pedem-se:

a) os diagramas de corpo livre das duas barras;

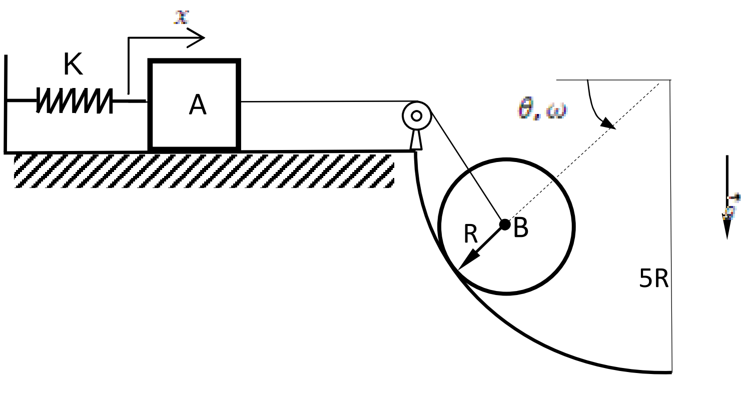
b) a aplicação dos teoremas da resultante e do momento da quantidade de movimento para os dois corpos;

c) as forças atuantes em A e em B;

d) as acelerações angulares $\dot{\omega}_{AB}$ e $\dot{\omega}_{BC}$ das barras AB e BC.



Questão 2 (5,0 pontos): O disco rígido homogêneo de massa ***3m***, centro ***B*** e raio ***R*** é abandonado a partir do repouso em uma posição inicial θ_0 e rola sem escorregar sobre uma rampa cilíndrica de raio ***5R***. O movimento é transmitido, através de um cabo inextensível e de uma polia, ambos de massa desprezível, ao bloco **A**, de massa ***m*** que, por sua vez, está conectado a uma mola ideal de constante elástica ***K***. O movimento do disco é responsável por arrastar o bloco ***A*** (sem tombamento) sobre a superfície horizontal rugosa (coeficiente de atrito dinâmico μ). Considerando que na posição inicial a mola não está deformada e que a coordenada linear x possui valor nulo exatamente nessa posição, pedem-se:



(a) os diagramas de corpo livre do bloco A e do disco de centro B;

(b) a energia cinética do sistema constituído pelo disco B e pelo bloco A em função da velocidade angular ω e dos parâmetros geométricos do problema, para uma posição genérica $\theta > \theta_0$;

(c) o trabalho realizado por todas as forças atuantes nesse sistema entre a posição inicial e uma posição θ genérica (<u>identificar claramente qual força realiza qual trabalho</u>);

(d) a velocidade angular ω_D do disco B nessa posição genérica;

(e) a aceleração angular $\dot{\omega}_D$ do disco B nessa posição genérica.

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

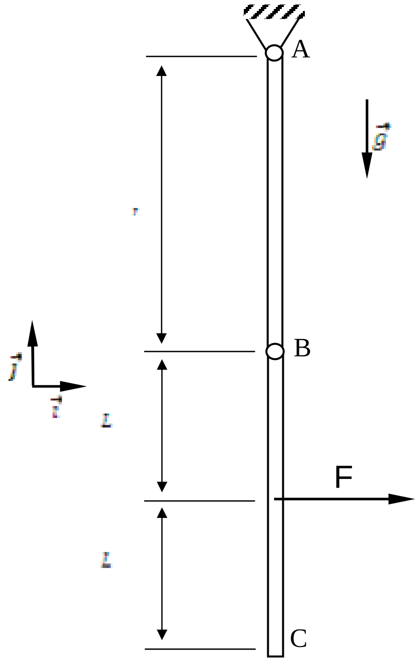
Questão 1 (5,0 pontos): O sistema ao lado é formado por duas barras homogêneas de massa ***m*** e comprimento ***L*** **($J_{Gz}=mL^2/12$)**. Em A e em B há articulações ideais. Em determinado instante o sistema, inicialmente em repouso na vertical, recebe a ação de uma força F conforme indicado. Para esse instante pedem-se:

a) os diagramas de corpo livre das duas barras;

b) a aplicação dos teoremas da resultante e do momento da quantidade de movimento para os dois corpos;

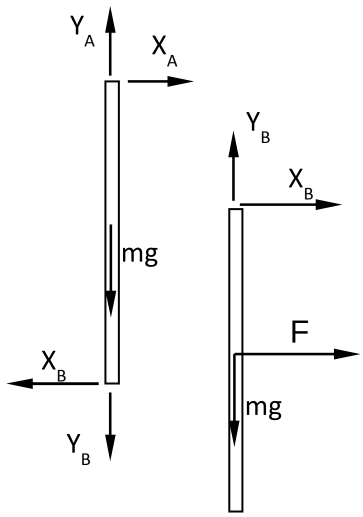
c) as forças atuantes em A e em B;

d) as acelerações angulares $\dot{\omega}_{AB}$ e $\dot{\omega}_{BC}$ das barras AB e BC.



Solução

(a)



(b)

Barra AB:

TR: $\vec{i}$: $X_A - X_B = m a_{G1_x}$ (1)

$\vec{j}$: $Y_A - Y_B - mg = 0$ (2)

TQMA (polo A)

$$m(G-A)\wedge\vec{a_A} + J_{Az}\dot{\omega}_{AB}\vec{k} = \overrightarrow{M_A^E} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{mL^2}{12}+\frac{mL^2}{4}\right)\dot{\omega}_{AB} = -LX_B \Rightarrow \left(\frac{mL^2}{3}\right)\dot{\omega}_{AB} = -LX_B \quad (3)$$

Barra BC:

TR: $\vec{i}$: $X_B + F = m a_{G2_x}$ (4)

$\vec{j}$: $Y_B - mg = 0$ (5)

TQMA (polo $G_1 2$)

$$J_{G2_z}\,\dot{\omega}_{BC}\vec{k} = \overrightarrow{M_{G2}^E} \Rightarrow$$

$$\frac{mL^2}{12}\dot{\omega}_{BC} = -\frac{L}{2}X_B \quad (6)$$

(c)

De (5): $Y_B = mg$; em (2): $Y_A = 2mg$

Relações cinemáticas:

$$\overrightarrow{a_{G1}} = \overrightarrow{a_A} + \dot{\omega}_{AB}\vec{k}\wedge(G_1 - A) = \dot{\omega}_{AB}\vec{k}\wedge\left(-\frac{L}{2}\vec{j}\right)$$

$$\overrightarrow{a_{G1}} = \frac{L}{2}\dot{\omega}_{AB}\vec{i} \quad (7)$$

$$\overrightarrow{a_{G2}} = \overrightarrow{a_B} + \dot{\omega}_{BC}\vec{k}\wedge(G_2 - B) = \overrightarrow{a_B} + \frac{L}{2}\dot{\omega}_{BC}\vec{i}$$

$$\overrightarrow{a_B} = \overrightarrow{a_A} + \dot{\omega}_{AB}\vec{k}\wedge(B-A) = \dot{\omega}_{AB}\vec{k}\wedge(-L\vec{j}) = \dot{\omega}_{AB}L\vec{i}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{a_{G2}} = L\left(\dot{\omega}_{AB} + \frac{\dot{\omega}_{BC}}{2}\right) \quad (8)$$

De (3) e (6):

$$\left(\frac{mL^2}{3}\right)\dot{\omega}_{AB} = \frac{mL^2}{6}\dot{\omega}_{BC} \Rightarrow \dot{\omega}_{BC} = 2\dot{\omega}_{AB} \quad (9)$$

Utilizando (7) (8) e (9) em (4):

$$X_B + F = mL\left(\dot{\omega}_{AB} + \frac{\dot{\omega}_{BC}}{2}\right) = 2mL\dot{\omega}_{AB} \Rightarrow$$

$$\dot{\omega}_{AB} = \frac{1}{2mL}(X_B + F)$$ em (3):

$$\left(\frac{mL^2}{3}\right)\frac{1}{2mL}(X_B+F) = -LX_B$$

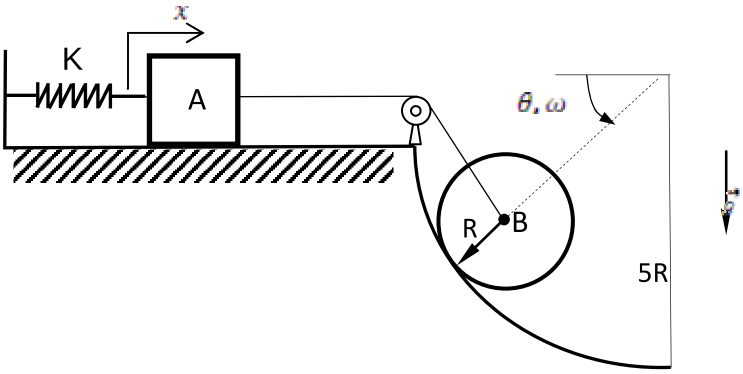
$$\Rightarrow \quad X_B = -\frac{F}{7}$$ em (1)

	$X_A = X_B + \frac{mL}{2}\frac{1}{2mL}(X_B + F) \Rightarrow \; X_A = \frac{F}{14}$

(d)

X_B em (3): $\dot{\omega}_{AB} = -L\left(-\frac{F}{7}\right)\left(\frac{3}{mL^2}\right) \Rightarrow \; \dot{\omega}_{AB} = \frac{3F}{7mL}$	X_B em (6): $\dot{\omega}_{BC} = -\frac{L}{2}\left(-\frac{F}{7}\right)\left(\frac{12}{mL^2}\right) \Rightarrow \; \dot{\omega}_{BC} = \frac{6F}{7mL}$

Questão 2 (5,0 pontos): O disco rígido homogêneo de massa ***3m***, centro ***B*** e raio ***R*** é abandonado a partir do repouso em uma posição inicial θ_0 e rola sem escorregar sobre uma rampa cilíndrica de raio ***5R***. O movimento é transmitido, através de um cabo inextensível e de uma polia, ambos de massa desprezível, ao bloco **A**, de massa ***m*** que, por sua vez, está conectado a uma mola ideal de constante elástica ***K***. O movimento do disco é responsável por arrastar o bloco ***A*** (sem tombamento) sobre a superfície horizontal rugosa (coeficiente de atrito dinâmico μ). Considerando que na posição inicial a mola não está deformada e que a coordenada linear x possui valor nulo exatamente nessa posição, pedem-se:



(a) os diagramas de corpo livre do bloco A e do disco de centro B;

(b) a energia cinética do sistema constituído pelo disco B e pelo bloco A em função da velocidade angular ω e dos parâmetros geométricos do problema, para uma posição genérica $\theta > \theta_0$;

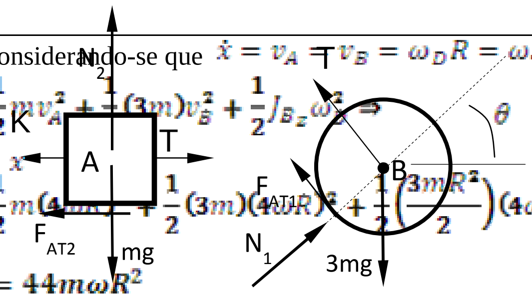
(c) o trabalho realizado por todas as forças atuantes nesse sistema entre a posição inicial e uma posição θ genérica (<u>identificar claramente qual força realiza qual trabalho</u>);

(d) a velocidade angular ω_D do disco B nessa posição genérica;

(e) a aceleração angular $\dot{\omega}_D$ do disco B nessa posição genérica.

Solução

a)



(b) Considerando-se que $\dot{x} = v_A = v_B = \omega_D R = \omega.4R$,

$$T = \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}(3m)v_B^2 + \frac{1}{2}J_{B_z}\omega_D^2 \Rightarrow$$

$$T = \frac{1}{2}m(4\omega R)^2 + \frac{1}{2}(3m)(4\omega R)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{3mR^2}{2}\right)(4\omega)^2$$

$$\Rightarrow T = 44m\omega R^2$$

(c) $\tau = \tau_{FAT_2} + \tau_{Kx} + \tau_{P_B}$

$$\tau = -\mu\, mg\,(\theta - \theta_0).4R + K/2(0 - [4R(\theta - \theta_0)]^2) + (3mg)4R(sen\,\theta - sen\,\theta_0) \Rightarrow$$

$$\tau = -\mu\, mg\,(\theta - \theta_0).4R - K(\theta - \theta_0)^2.8R^2 + 12\,mg\,R(sen\,\theta - sen\,\theta_0)$$

(d) Pelo teorema da energia cinética: $\tau = T(t) - T(t_0) \Rightarrow$

$$-\mu\, mg\,(\theta - \theta_0).4R - K(\theta - \theta_0)^{2.8R^2} + 12\,mg\,R(sen\,\theta - sen\,\theta_0) = 44m\omega^2R^2 \Rightarrow$$

$$\omega_D^2 = 4\omega^2 = \frac{1}{11}\left(-\frac{4\mu g(\theta - \theta_0)}{R} - \frac{8K}{m}(\theta - \theta_0)^2 + \frac{12g}{R}(sen\,\theta - sen\,\theta_0)\right)$$

(e) Derivando a expressão acima em relação ao tempo e lembrando que $\dot{\theta} = \omega = \frac{\omega_D}{4}$ chega-se a:

$$2\omega_D\dot{\omega}_D = \frac{1}{11}\left(-\frac{4\mu g}{R}\,\dot{\theta} - \frac{16K}{m}(\theta-\theta_0)\dot{\theta} + \frac{12g}{R}\cos\theta.\dot{\theta}\right) = \frac{1}{11}\left(-\frac{4\mu g}{R}\frac{\omega_D}{4} - \frac{16K}{m}(\theta-\theta_0)\frac{\omega_D}{4} + \frac{12g}{R}\cos\theta\right.$$

$$\dot{\omega}_D = \frac{1}{22}\left(-\frac{\mu g}{R} - \frac{4K}{m}(\theta-\theta_0) + \frac{3g}{R}\cos\theta\right)$$