ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

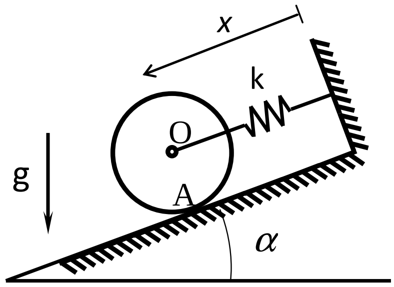
Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 – MECÂNICA I – Terceira Prova – 26 de junho de 2015

Duração da Prova: 110 minutos (não é permitido uso de calculadoras)

1ª Questão (4,0 pontos)

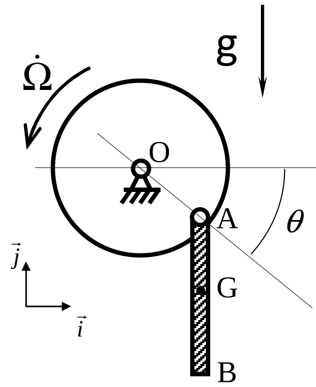
A figura mostra um disco de centro O, massa m e raio R, que parte do repouso e rola sem escorregar em relação ao plano inclinado, sob ação da gravidade. O disco está conectado a uma parede por meio de uma mola de rigidez k. No instante inicial, $x = x_0$ e a mola não esta deformada. Considerando instantes $t > t_0$, em que $x > x_0$ e a mola ainda não atingiu a sua deflexão máxima:



(a) Esboçar o diagrama de corpo livre do disco;
(b) determinar a energia cinética do disco em função da velocidade $\dot{x}$;
(c) determinar o trabalho realizado pelos esforços aplicados ao disco em função de x;
(d) determinar a aceleração angular $\dot{\vec{\omega}}$ do disco, em função de x.

2ª Questão (4,0 pontos)

No sistema mostrado na figura, a barra AB, de massa m e comprimento L, está articulada no ponto A ao disco de massa m e raio R. O sistema parte do repouso, com a barra AB vertical e com a reta que passa por O e A inclinada de um ângulo θ em relação à horizontal. Em um dado instante inicial, o disco passa a ter uma aceleração angular conhecida $\dot{\vec{\Omega}} = \dot{\Omega}\,\vec{k}$. Para este instante inicial, pede-se:



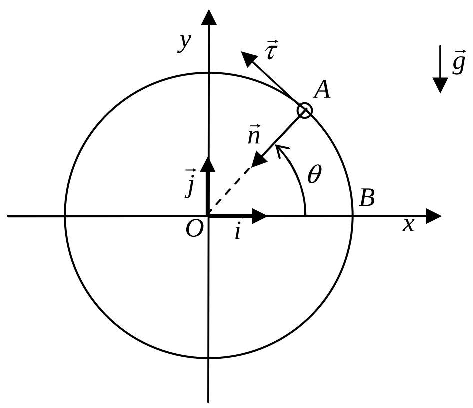
(a) o diagrama de corpo livre do disco e o diagrama de corpo livre da barra;
(b) a aceleração do ponto A;
(c) o vetor aceleração angular $\dot{\vec{\omega}}$ da barra;
(d) a aceleração do baricentro da barra;
(e) a força que o disco aplica na barra pela articulação do ponto A.

Dado: Para o disco $J_{z_O} = \dfrac{mR^2}{2}$, para a barra $J_{z_G} = \dfrac{mL^2}{12}$

3ª Questão (2,0 pontos)

Um pequeno anel A de massa m é vinculado a um arame circular descrito pela curva $\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases}$

Admitindo-se que não exista atrito entre o arame e o anel e que este seja abandonado em repouso na posição $P = \left(R\dfrac{\sqrt{2}}{2}, R\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, sujeito à ação da gravidade, pede-se, para o instante em que atingir o ponto $B = (R,0)$:



(a) determinar os versores do triedro de Frenet;
(b) determinar a magnitude da velocidade do anel;
(c) determinar a componente normal da aceleração do anel;
(d) esboçar o diagrama de corpo livre do anel;
(e) determinar a componente tangencial da aceleração do anel.

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

1ª Questão (**4,0 pontos**)

A figura mostra um disco de centro *O*, massa *m* e raio *R*, que parte do repouso e rola sem escorregar em relação ao plano inclinado, sob ação da gravidade. O disco está conectado a uma parede por meio de uma mola de rigidez *k*. No instante inicial $x = x_0$ e a mola não esta deformada. Considerando instantes $t > t_0$, em que $x > x_0$ e a mola ainda não atingiu a sua deflexão máxima:

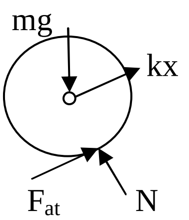
(a) Esboçar o diagrama de corpo livre do disco;

(b) determinar a energia cinética do disco em função da velocidade $\dot{x}$;

(c) determinar o trabalho realizado pelos esforços aplicados ao disco em função de *x*;

(d) determinar a aceleração angular $\dot{\vec{\omega}}$ do disco, em função de *x*.

Como o disco rola sem escorregar, $\omega = \dfrac{\dot{x}}{R}$.



$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2 \Rightarrow \boxed{T = \frac{3}{4}m\dot{x}^2}$$

$$\boxed{\tau = mg(x - x_0)sen\alpha - \frac{1}{2}kx^2}$$

Aplicando o Teorema da Energia Cinética (TEC): $\tau = \Delta T$, sendo $T_0 = 0$, pois o sistema parte do repouso:

$$mg(x - x_0)sen\alpha - \frac{1}{2}kx^2 = \frac{3}{4}m\dot{x}^2$$

Derivando a expressão acima em relação ao tempo:

$mg\dot{x}sen\alpha - kx\dot{x} = \dfrac{3}{2}m\dot{x}\ddot{x}$, resultando em $\ddot{x} = \dfrac{2}{3}\left(gsen\alpha - \dfrac{k}{m}x\right)$

Sendo $\vec{\omega} = \omega\vec{k} = \dfrac{\dot{x}}{R}\vec{k}$, a aceleração angular será: $\dot{\vec{\omega}} = \dot{\omega}\vec{k} = \dfrac{\ddot{x}}{R}\vec{k}$, assim:

$$\boxed{\dot{\vec{\omega}} = \frac{2}{3R}\left(gsen\alpha - \frac{k}{m}\right)\vec{k}}$$

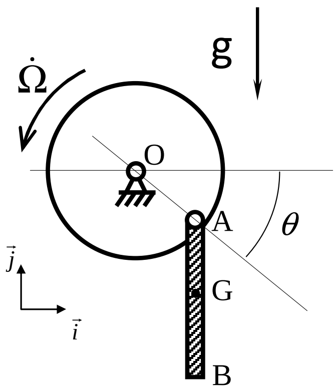
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

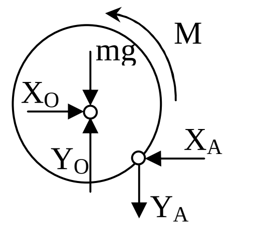
2ª Questão (4,0 pontos)

No sistema mostrado na figura, a barra *AB*, de massa *m* e comprimento *L*, está articulada no ponto *A* ao disco de massa *m* e raio *R*. O sistema parte do repouso, com a barra *AB* vertical e com a reta que passa por *O* e *A* inclinada de um ângulo θ em relação à horizontal. Em um dado instante inicial, o disco passa a ter uma aceleração angular conhecida $\dot{\vec{\Omega}} = \dot{\Omega}\,\vec{k}$. Para este instante inicial, pede-se:



(f) o diagrama de corpo livre do disco e o diagrama de corpo livre da barra;
(g) a aceleração do ponto *A*;
(h) o vetor aceleração angular $\dot{\vec{\omega}}$ da barra;
(i) a aceleração do baricentro da barra;
(j) a força que o disco aplica na barra pela articulação do ponto *A*.

Dado: Para o disco $J_{z_O} = \dfrac{mR^2}{2}$, para a barra $J_{z_G} = \dfrac{mL^2}{12}$

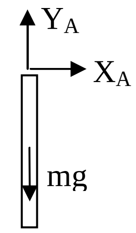


Sendo O ponto fixo e considerando que no instante inicial o sistema parte do repouso, têm-se:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \dot{\vec{\Omega}} \wedge (A-O) + \Omega^2 \vec{k} \wedge \left[\vec{k} \wedge (A-O)\right]$$

$$\vec{a}_A = \vec{0} + \dot{\Omega}\vec{k} \wedge R\left(\cos\theta\vec{i} - sen\theta\vec{j}\right) + \vec{0} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{a}_A = \dot{\Omega}R\left(sen\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}\right)}$$



Para a aceleração do baricentro da barra podemos escrever:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_A + \dot{\omega}\vec{k} \wedge (G-A) + \omega^2 \vec{k} \wedge \left[\vec{k} \wedge (G-A)\right]$$

Considerando que no instante inicial o sistema parte do repouso:

$$\vec{a}_G = \dot{\Omega}R\left(sen\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}\right) + \dot{\omega}\vec{k} \wedge \left(-\frac{L}{2}\vec{j}\right) + \vec{0} \Rightarrow \vec{a}_G = \left(\dot{\Omega}Rsen\theta + \dot{\omega}\frac{L}{2}\right)\vec{i} + \dot{\Omega}R\cos\theta\vec{j}$$

TMA no disco, pólo em G: $\dot{\vec{H}}_G = \vec{M}_G$

$$\vec{H}_G = J_{zG}\omega\vec{k} \Rightarrow \dot{\vec{H}}_G = J_{zG}\dot{\omega}\vec{k} \quad \text{e} \quad \vec{M}_G = -X_A\frac{L}{2}\vec{k}\ , \quad \text{assim: } \frac{mL^2}{12}\dot{\omega}\vec{k} = -X_A\frac{L}{2}\vec{k} \Rightarrow \dot{\omega} = -\frac{6X_A}{mL} \qquad (1)$$

TMB no disco:

$$m\vec{a}_G = X_A\vec{i} + (Y_A - mg)\vec{j} \Rightarrow m\left(\dot{\Omega}Rsen\theta + \dot{\omega}\frac{L}{2}\right)\vec{i} + m\dot{\Omega}R\cos\theta\vec{j} = X_A\vec{i} + (Y_A - mg)\vec{j}$$

$$\begin{cases} X_A = m\dot{\Omega}Rsen\theta + m\dot{\omega}\dfrac{L}{2} & (2) \\ Y_A - mg = m\dot{\Omega}R\cos\theta & (3) \end{cases}$$

Resolvendo (1) e (2): $\boxed{X_A = \dfrac{m\dot{\Omega}Rsen\theta}{4}}$ e $\boxed{\dot{\omega} = -\dfrac{3\dot{\Omega}Rsen\theta}{2L}}$ De (3): $\boxed{Y_A = m\dot{\Omega}R\cos\theta + mg}$

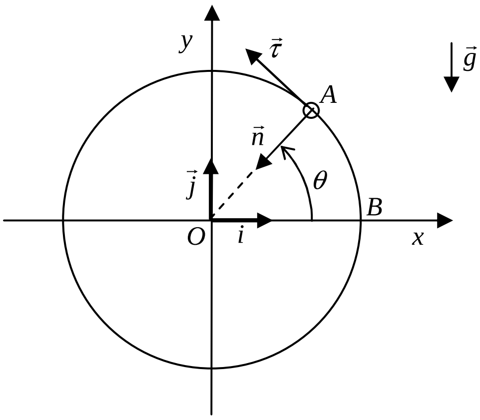
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

3ª Questão (2,0 pontos). Um pequeno anel A de massa m é vinculado a um arame circular descrito pela curva $\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases}$ Admitindo-se que não exista atrito entre o arame e o anel e que este seja abandonado em repouso na posição $P = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, sujeito à ação da gravidade, pede-se, para o instante em que atingir o ponto $B = (R,0)$:

(a) determinar os versores do triedro de Frenet;
(b) determinar a magnitude da velocidade do anel;
(c) determinar a componente normal da aceleração do anel;
(d) esboçar o diagrama de corpo livre do anel;
(e) determinar a componente tangencial da aceleração do anel;



Em coordenadas cartesianas, o raio vetor $(P-O)=\vec{r}$ é dado por:

$$\vec{r} = R\cos\theta\vec{i} + R\sin\theta\vec{j}$$

O versor tangente à curva vincular é:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}/d\theta}{|d\vec{r}/d\theta|} = \frac{-R\sin\theta\vec{i} + R\cos\theta\vec{j}}{R} = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}$$

Portanto, no instante em que $A \equiv B$, ou seja, em que $\theta = 0$, tem-se:

$$\vec{\tau}(t)\big|_{A\equiv B} = -\sin 0\vec{i} + \cos 0\vec{j} = \vec{j}$$

Sendo $s = R\theta$ o comprimento do arco medido sobre a trajetória circular e $\rho = R$ o raio de curvatura principal em quaisquer de seus pontos, a primeira fórmula de Frenet fornece o versor normal, ou seja:

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{\vec{n}}{\rho} = \frac{\vec{n}}{R},$$

$$\Rightarrow \vec{n} = R\frac{d\vec{\tau}}{Rd\theta} \Rightarrow \vec{n} = \frac{d\vec{\tau}}{d\theta} = -\cos\theta\vec{i} - \sin\theta\vec{j}$$

Portanto, no instante em que o anel atinge o ponto B tem-se:

$$\Rightarrow \vec{n}(t)\big|_{A\equiv B} = -\cos 0\vec{i} - \sin 0\vec{j} = -\vec{i}$$

(0,5 ponto)

Aplicando-se o Teorema da Energia cinética entre os pontos A e B, resulta:

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = mg\left(y_A - y_B\right) = mgR\left[\sin(45) - \sin\theta\right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} v^2 = gR\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin\theta\right) \Rightarrow v = \sqrt{2gR\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin\theta\right)}$$

Portanto, a velocidade do anel no instante de coincidência com B será:

$$\vec{v}(t)\Big|_{A\equiv B} = \sqrt{2gR\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin 0\right)}\,\vec{\tau}(t)\Big|_{A\equiv B} = -\sqrt{gR\sqrt{2}}\,\vec{j}$$

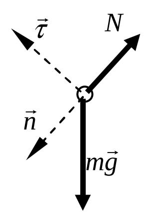
(0,5 ponto)

e a componente normal da aceleração do anel, nesse instante, será:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{R} = \frac{gR\sqrt{2}}{R} = g\sqrt{2}$$

(0,5 ponto)

Tomando-se como referência o diagrama de corpo livre do anel, esboçado abaixo, e aplicando-se a equação fundamental da Dinâmica, tem-se:



$$-mg\vec{j} - N\vec{n} = m\left(a_t\vec{\tau} + a_n\vec{n}\right)$$

$$\Rightarrow -mg\cos\theta\,\vec{\tau} + mg\sin\theta\,\vec{n} - N\vec{n} = m\left(a_t\vec{\tau} + a_n\vec{n}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} mg\cos\theta = ma_t \\ mg\sin\theta - N = ma_n \end{cases}$$

Das equações acima conclui-se que:

$$\begin{cases} -mg\cos\theta = ma_t \Rightarrow a_t = -g\cos\theta \\ mg\sin\theta - N = ma_n \Rightarrow N = mg\sin\theta - ma_n \end{cases}$$

Portanto, no instante em que o anel se localiza no ponto B, a aceleração tangencial é:

$$a_t = -g\cos 0 = -g$$

(0,5 ponto)

Combinando-se as componentes tangencial e normal da aceleração, obtém-se, para o instante em que o anel coincide com B:

$$\vec{a}(t)\Big|_{A\equiv B} = -g\vec{j} - g\sqrt{2}\,\vec{i}$$