ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

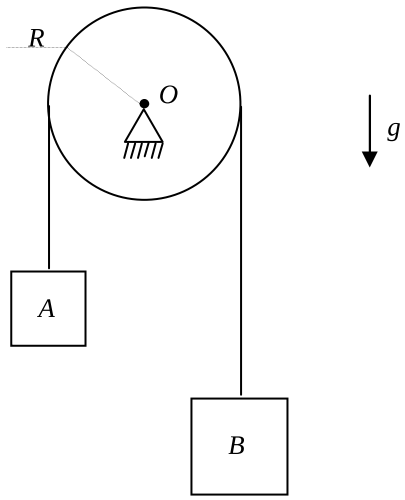
Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 - Mecânica A (Reoferecimento)

Terceira Prova- Duração 110 minutos – 24 de junho de 2014

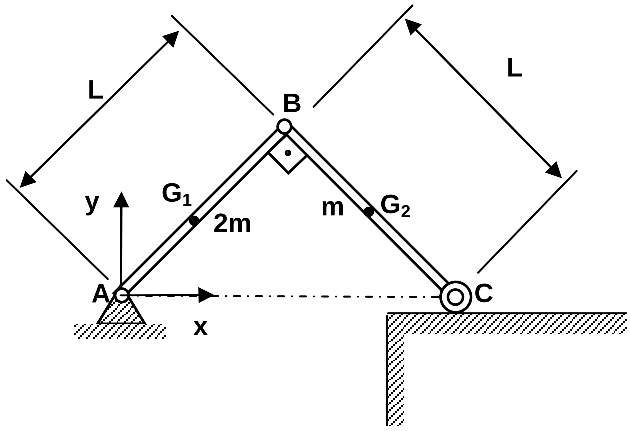
Não é permitido o uso de equipamentos eletrônicos, tais como calculadoras, celulares e *tablets*.

QUESTÃO 1 (5 pontos): Uma polia de massa M e raio R é solidária a um eixo horizontal apoiado sobre mancais. Os blocos A, de massa m_A, e B, de massa m_B, ($m_B > m_A$) são presos a um cabo inextensível que passa pela polia, havendo suficiente atrito para que o cabo não deslize sobre esta. Considerando a polia como um disco de raio R e desprezando o atrito nos mancais, pedem-se:



(a) os diagramas de corpo livre dos blocos e da polia;
(b) a aceleração angular da polia e as acelerações dos blocos;
(c) as forças de tração no cabo.

QUESTÃO 2 (5 pontos): Considere o mecanismo ilustrado na figura, no qual as barras homogêneas *AB* (massa **2m** e baricento **G₁**) e *BC* (massa **m** e baricentro **G₂**) articulam-se em *A* e em *B*. Ambas as articulações são ideais (isto é, sem atrito), sendo *A* fixa e *B* móvel. Na extremidade *C* da barra *BC* há um rolete que desliza sem atrito sobre uma superfície horizontal. Sabendo-se que o sistema parte do repouso na posição mostrada pedem-se:



1. <u>Para uma configuração genérica</u> (ângulo $A\hat{B}C = \theta$):

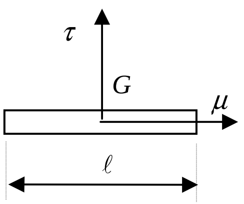
(a) os diagramas de corpo livre das barras *AB* e *BC*;

2. <u>Para o instante em que as barras estiverem alinhadas na horizontal:</u>

(b) o trabalho realizado pelas forças atuantes no sistema desde a configuração inicial até a final, justificando os casos em que o trabalho for nulo;
(c) o vetor rotação $\vec{\omega}_{AB}$ da barra *AB*;
(d) o vetor rotação $\vec{\omega}_{BC}$ da barra *BC*.

Utilize o sistema de referência fixo ***Axyz*** para a descrição dos vetores requeridos.

Dado, para uma barra delgada de comprimento ℓ e massa m:

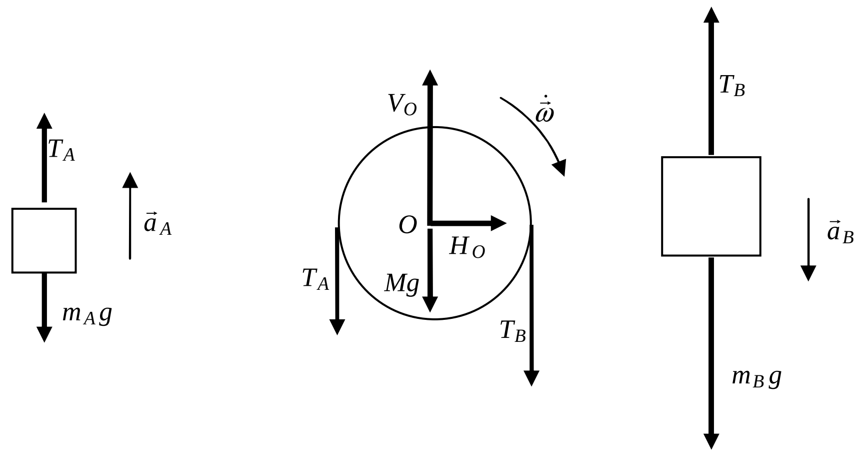


$$J_{G\tau} = \frac{m\ell^2}{12}$$

RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 1

(a) Construção dos diagramas de corpo livre

Na figura abaixo, apresentam-se os diagramas de corpo livre da polia e dos blocos.



Resposta a: 1,5 pontos

Aplicando-se à polia as equações do Teorema da Resultante e do Teorema do Momento da Quantidade de Movimento, obtêm-se:

$$H_O = 0 \qquad (1)$$
$$V_O - T_B - T_A = 0 \qquad (2)$$
$$T_B \cdot R - T_A \cdot R = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\omega} \qquad (3)$$

1,0 ponto

Aplicando-se aos blocos as equações do Teorema da Resultante, obtêm-se:

$$m_B g - T_B = m_B a_B \qquad (4)$$
$$T_A - m_A g = m_A a_A \qquad (5)$$

1,0 ponto

Como o cabo é inextensível, as seguintes relações cinemáticas são válidas:

$$|\vec{a}_A| = |\vec{a}_B| \qquad (6)$$

0,5 ponto

Além do mais, por causa do atrito, não há escorregamento entre o cabo e a polia. Dessa forma, pode-se escrever:

$$|\vec{a}_A| = |\vec{a}_B| = |\dot{\omega}| \cdot R \qquad (7)$$

0,5 ponto

Resolvendo-se o sistema de 7 equações a 7 incógintas ($H_O, V_O, T_A, T_B, \dot{\omega}, a_A, a_B$), obtêm-se:

$$\dot{\omega} = 2\frac{m_A - m_B}{2m_A + M + 2m_B}\frac{g}{R}$$

$$a_A = 2\frac{m_B - m_A}{2m_A + M + 2m_B}g$$

$$a_B = 2\frac{m_A - m_B}{2m_A + M + 2m_B}g$$

Resposta c: 0,25 ponto

$$T_A = m_A\left[1 - 2\frac{m_A - m_B}{2m_A + M + 2m_B}\right]g$$

$$T_B = m_B\left[1 + 2\frac{m_A - m_B}{2m_A + M + 2m_B}\right]g$$

Resposta b: 0,25 ponto

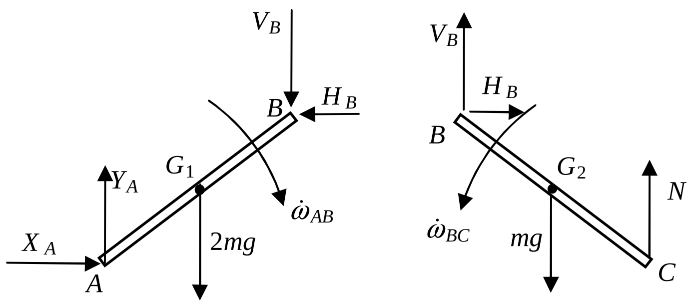
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 2

a) Construção dos diagramas de corpo livre das barras

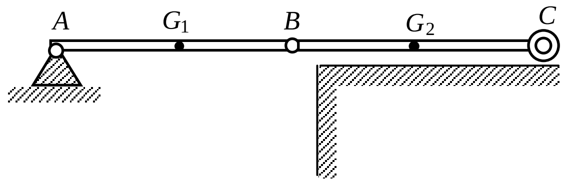
Os diagramas de corpo livre das barras AB e BC para uma situação em que delimitam entre si um ângulo genérico $ABC = \theta$, são apresentados na figura abaixo.



Resposta a: 1,5 pontos

b) Cálculo do trabalho realizado pelas forças atuantes no sistema

Antes de calcularmos o trabalho realizado pelas forças internas e externas que atuam no sistema constituído pelas barras AB e BC entre as configurações inicial $\theta = 90°$ e $\theta = 180°$ (vide figura a seguir), notemos que:



- como não há atrito na articulação B, o trabalho realizado pelas forças de contacto entre as barras AB e BC é nulo, uma vez que essas forças são iguais e opostas (Princípio da Ação e Reação) e se deslocam sobre a mesma trajetória durante o movimento do mecanismo;
- o trabalho realizado pela reação sobre a articulação em A é nulo, pois A é um ponto fixo;
- o trabalho realizado pela força normal em C é nulo, pois essa força desloca-se normalmente à sua direção.

Concluímos, assim, que as únicas forças que realizam trabalho durante o movimento descrito pelo sistema são os pesos das barras, ou seja, o trabalho total realizado pelas forças que atuam sobre o sistema de barras AB e BC entre as configurações $\theta = 90°$ e $\theta = 180°$, é:

$$\tau_{90 \to 0} = 2mg \frac{L}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + mg \frac{L}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = mg \frac{3L\sqrt{2}}{4}$$

Resposta b: 1,5 pontos

c-1) Cálculo da energia cinética do sistema

Em um instante t qualquer, a energia cinética do sistema de barras AB e BC é:

$$T(t) = T_{AB} + T_{BC}$$

Como a barra AB realiza movimento de rotação em torno do eixo fixo Az, (isto é, $\vec{\omega}_{AB} = -\omega_{AB}\vec{k}$), sua energia cinética, em um instante t qualquer é dada por:

$$T_{AB}(t) = \frac{1}{2} J_{Az}^{AB} \omega_{AB}^2(t) = \frac{1}{2} 2m \frac{L^2}{3} \omega_{AB}^2(t) = m \frac{L^2}{3} \omega_{AB}^2(t)$$

A barra BC, por sua vez, realiza um movimento plano ao longo do plano $z = 0$. Lembrando que a expressão geral da energia cinética de um corpo rígido é

$$T = \frac{1}{2} m v_O^2 + m\vec{v}_O \cdot [\vec{\omega} \wedge (G - O)] + \frac{1}{2} [\omega]^T \cdot [J_O] \cdot [\omega]$$

e adotando $O = B$ como pólo de referência para o cálculo, tem-se:

$$T_{BC}(t) = \frac{1}{2} m v_B^2(t) + m\vec{v}_B(t) \cdot \left[\omega_{BC}(t)\vec{k} \wedge (G - B)\right] + \frac{1}{2} J_{Bz}^{BC} \omega_{BC}^2(t)$$

Resposta c1-a: 0,5 ponto

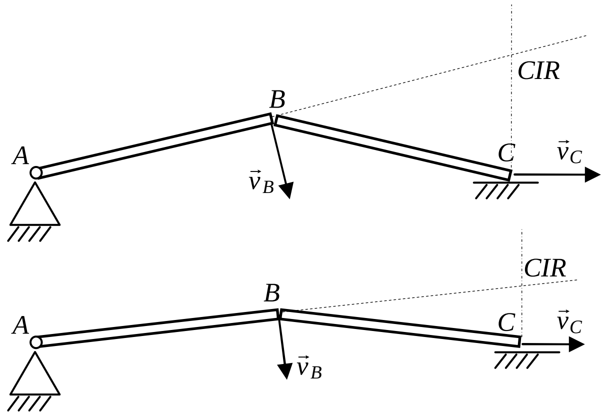
Como o sistema parte do equilíbrio, sua energia cinética inicial é

$$T(0) = 0$$

Na configuração em que ambas as barras se encontram alinhadas com a horizontal, verificamos que

- $\vec{v}_B = \omega_{AB}\vec{k} \wedge (B - A) = -\omega_{AB}\vec{k} \wedge L\vec{i} = -\omega_{AB} L\vec{j}$
- $(G - B) = \frac{L}{2}\vec{i}$
- $\vec{v}_C = \vec{0}$

A última das assertivas acima pode não parecer evidente à primeira vista. Portanto, para explicitá-la consideraremos a figura abaixo, na qual os centros instantâneos de rotação da barra BC são determinados graficamente para duas configurações do sistema vizinhas àquela em que que $\theta = 180°$.



Pode-se notar que, à medida que θ se aproxima de $180°$, o centro instantâneo de rotação da barra se aproxima de C. Portanto, no limite em que $\theta = 180°$, a velocidade de C é zero. Nessas circunstâncias C é um ponto de reversão.

Resposta c1-b: 0,5 ponto

Aplicando-se a equação fundamental da cinemática à barra BC, ou seja,

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{BC} \wedge (C - B),$$

resulta

$$\vec{0} = -\omega_{AB} L\vec{j} + \omega_{BC}\vec{k} \wedge L\vec{i} = -\omega_{AB} L\vec{j} + \omega_{BC} L\vec{j},$$

ou seja,

$$\omega_{AB} = \omega_{BC}$$

Portanto, para $\theta = 0$, a expressão da energia cinética do sistema é:

$$T(\theta=0) = \underset{AB}{T}(\theta=0) + \underset{BC}{T}(\theta=0) = m\frac{L^2}{3}\omega_{AB}^2 + \frac{1}{2}mL^2\omega_{AB}^2 - m\omega_{AB}L\vec{j} \cdot \left[\omega_{BC}\vec{k} \wedge \frac{L}{2}\vec{i}\right] + \frac{1}{2}m\frac{L^2}{3}\omega_{BC}^2$$

$$T(\theta=0) = \underset{AB}{T}(\theta=0) + \underset{BC}{T}(\theta=0) = m\frac{L^2}{3}\omega_{AB}^2 + \frac{1}{2}mL^2\omega_{AB}^2 - m\omega_{AB}L\vec{j} \cdot \left[\omega_{AB}\vec{k} \wedge \frac{L}{2}\vec{i}\right] + \frac{1}{2}m\frac{L^2}{3}\omega_{AB}^2$$

ou seja,

$$T(\theta=0) = \frac{1}{3}mL^2\omega_{AB}^2 + \frac{1}{2}mL^2\omega_{AB}^2 - \frac{1}{2}mL^2\omega_{AB}^2 + \frac{1}{6}mL^2\omega_{AB}^2 = \frac{1}{2}mL^2\omega_{AB}^2$$

Resposta c1-c: 0,5 ponto

c-2) Aplicação do Teorema da Energia Cinética

O Teorema da Energia Cinética para o sistema de barras AB e BC entre as configutações $\theta = 90°$ e $\theta = 0°$ fornece:

$$mg\frac{3L\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2}mL^2\omega_{AB}^2,$$

ou seja:

$$\omega_{AB} = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{2}\frac{g}{L}}$$

c-d) Vetores rotação das barras

Considerando-se os resultados anteriores, as barras AB e BC, no instante em que estas se encontram alinhadas com a horizontal, estão animadas com os vetores rotação

$$\vec{\omega}_{AB} = -\sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{2}\frac{g}{L}}\vec{k}$$

e

$$\vec{\omega}_{BC} = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{2}\frac{g}{L}}\vec{k}$$

Respostas c e d: 0,5 ponto