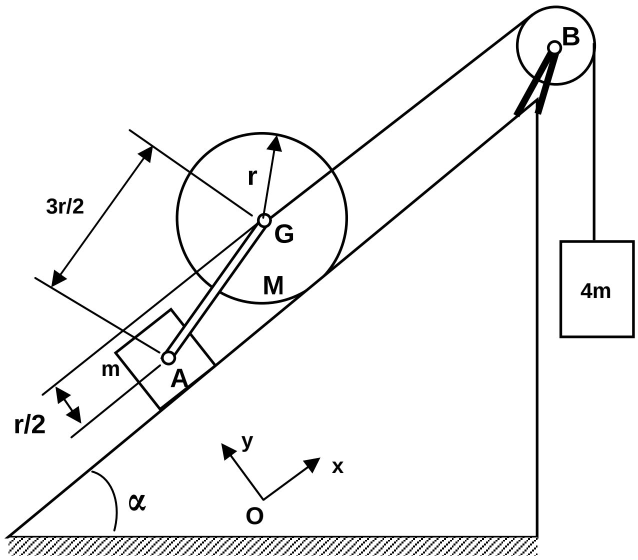
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

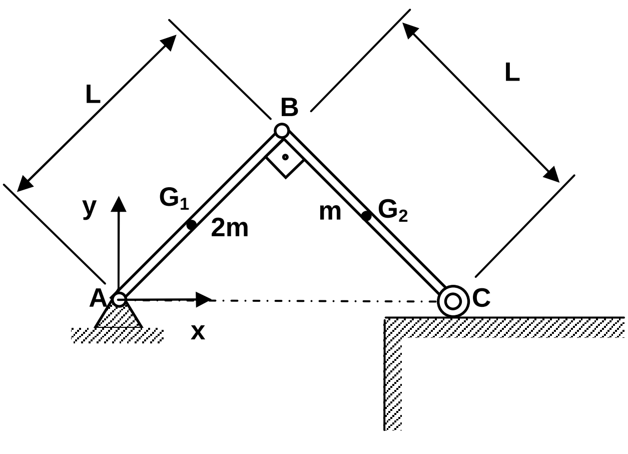
PME 2100 – MECÂNICA A – P3 (Reoferecimento 2010) 25/6/2010 – Duração: 90 minutos.
Obs: Não é permitido o uso de calculadoras.
Docentes responsáveis: Prof. Dr. Flavius Portella Ribas Martins /Prof. Dr. Flávio Celso Trigo



QUESTÃO 1 (5 pontos): Um disco homogêneo de massa **M** e raio **r** liga-se a um bloco homogêneo de massa **m** por meio de uma barra de comprimento **L=3r/2** e massa desprezível. O disco rola sem escorregar para cima sobre uma rampa (de inclinação **α**, constante) devido à ação da força de tração de um cabo ideal que, enrolado a uma polia ideal de massa desprezível, conecta-se a um bloco homogêneo de massa **4m**. Considere o atrito entre o bloco de massa **m** e a rampa desprezível. Para a configuração indicada e adotando-se o sistema de referência inercial **Oxy,** com **Ox** paralelo à rampa**,** pedem-se:

a) os diagramas de corpo livre dos blocos e do disco;
b) as equações do TMB e do TMA (onde pertinente) para os mesmos corpos rígidos citados no item (a);
c) a aceleração do bloco de massa m;
d) a aceleração angular do disco;
e) a força de tração no cabo.
Dado, para um disco homogêneo de massa M e raio r: $\mathbf{J_{Gz}}=Mr^2/2$

QUESTÃO 2 (5 pontos): Considere o mecanismo ilustrado na figura, no qual as barras AB (homogênea, massa **2m** e baricento $\mathbf{G_1}$) e BC (homogênea, massa **m** e baricentro $\mathbf{G_2}$) articulam-se em A e B. Ambas as articulações são ideais (isto é, sem atrito), sendo A fixa e B móvel. Na extremidade C da barra BC há um rolete que desliza sem atrito sobre uma superfície horizontal. Sabendo-se que o sistema parte do repouso na posição mostrada pedem-se:

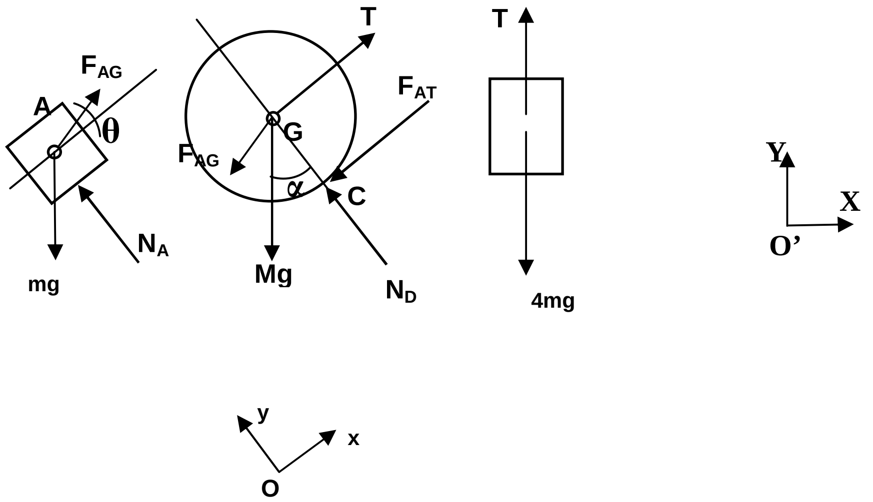


1. Para uma configuração genérica (ângulo $A\hat{B}C = \theta$):
(a) os diagramas de corpo livre das barras AB e BC;
2. Para o instante em que as barras estiverem alinhadas na horizontal:
(b) o trabalho realizado pelas forças atuantes no sistema desde a configuração inicial até a final, justificando os casos em que o trabalho for nulo;
(c) o vetor rotação $\vec{\omega}_{AB}$ da barra AB;
(d) o vetor rotação $\vec{\omega}_{BC}$ da barra BC.
Utilize o sistema de referência inercial **Axyz** para a descrição dos vetores requeridos.
Dado, para uma barra delgada de comprimento L e massa m: $\mathbf{J_{Gz}}=mL^2/12$.

<u>**Resolução**</u>

Questão 1)

a) diagramas de corpo livre **(1 ponto)**



b) equações do TMB (blocos e disco) e TMA (disco), de acordo com o sistema de referência adotado:

TMB - Bloco de massa *m* **(0,5 pontos)** TMB- Bloco de massa *4m* **(0,5 pontos)** *TMB* – Disco **(0,5 pontos)**

$$\vec{i}: F_{AG}\cos\theta - mg\,\text{sen}\alpha = ma_{Ax} \quad (1)$$

$$\vec{j}: -mg\cos\alpha + F_{AG}\text{sen}\theta + N_A = 0 \quad (2)$$

$$\vec{J}: T - 4mg = -4ma \quad (3)$$

$$\vec{i}: -F_{AG}\cos\theta - Mg\,\text{sen}\alpha - F_{AT} + T = Ma_{Gx} (4)$$

$$\vec{j}: -F_{AG}\text{sen}\theta - Mg\cos\alpha + N_D = 0 (5)$$

TMA – Disco (em relação ao baricentro) **(0,5 pontos)**
Como o ponto C é o CIR, o disco é homogêneo e o problema é plano, o TMA reduz-se a

$$J_{Gz}\dot{\omega} = M_G^{\;EXT} = r.F_{AT} \Rightarrow \frac{Mr^2}{2}\dot{\omega} = r.F_{AT} \Rightarrow \frac{Mr}{2}\dot{\omega} = F_{AT} \quad (6)$$

Tem-se as incógnitas: $\dot{\omega}, F_{AT}, N_A, N_D, F_{AG}, a, a_{Gx}, a_{Ax}$ e somente 6 equações. No entanto, como C é o CIR,

$\dot{\omega}r = a_{Gx}$ e, ainda, como a barra AG é rígida e não sofre rotação, $a_{Gx} = a_{Ax} = a$, o que permite a solução do problema.

Itens c (1 ponto), d (0,5 pontos), e (0,5 pontos)

de (6) $F_{AT} = \dfrac{M}{2}a \ (7)$.

de (3) $T = 4m(g-a)\ (8)$. Da geometria dada, $\text{sen}\theta = 1/3$, $\cos\theta = 2\sqrt{2}/3$. Com esses valores, de (1),

$F_{AG} = m(a + g\,\text{sen}\alpha)\dfrac{3}{2\sqrt{2}}\ (9)$. Substituindo-se (7), (8) e (9) em (4),

$$-m(a+g\,\text{sen}\alpha)\frac{3}{2\sqrt{2}}\frac{2\sqrt{2}}{3} - Mg\text{sen}\alpha - \frac{Ma}{2} + 4m(g-a) = Ma \Rightarrow \boxed{a = \frac{g[4m - (m+M)\text{sen}\alpha]}{5m + 3M/2} \quad \text{(c)}}$$

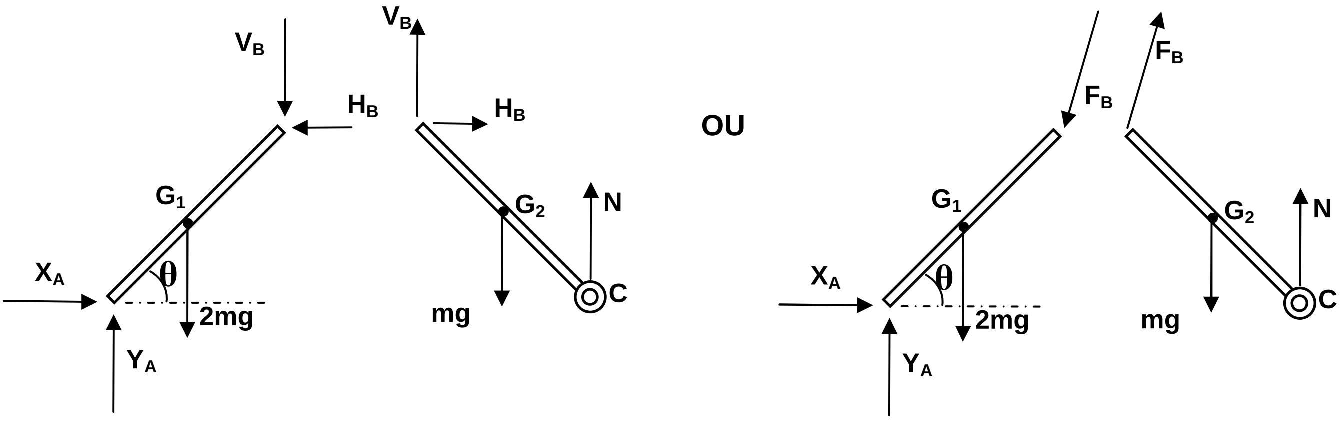
Da relação cinemática entre o CIR e o baricentro do disco obtém-se

$$\boxed{\dot{\omega} = \frac{g}{r}\frac{[4m-(m+M)\operatorname{sen}\alpha]}{5m+3M/2} \quad \text{(d)}}$$

De (9) obtém-se $\boxed{F_{AG} = mg\left[\frac{[4m-(m+M)\operatorname{sen}\alpha]}{5m+3M/2}+\operatorname{sen}\alpha\right]\frac{3\sqrt{2}}{4} \quad \text{(e)}}$

Questão 2)

a) diagramas de corpo livre para uma situação genérica (**1 ponto**)



b) O trabalho das forças internas ***(i)*** e externas ***(e)*** sobre o sistema é dado por:

$$\underset{t_0\to t_1}{\tau}^{i+e} = \underset{t_0\to t_1}{\tau}^{\vec{F}A} + \underset{t_0\to t_1}{\tau}^{\vec{F}B} + \underset{t_0\to t_1}{\tau}^{\vec{F}C} + \underset{t_0\to t_1}{\tau}^{\vec{F}G_1} + \underset{t_0\to t_1}{\tau}^{\vec{F}G_2}$$

$$\underset{t_0\to t_1}{\tau}^{\vec{F}A} = \underset{t_0\to t_1}{\tau}^{XA} + \underset{t_0\to t_1}{\tau}^{YA} = 0 \ \ (A \text{ é ponto fixo})$$

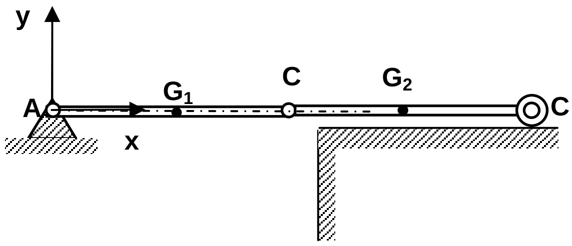
Na articulação B, o trabalho é equivalente ao de um sistema de forças nulo. Como não há atrito no contato, o deslocamento elementar arbitrário $d\vec{r}$ é idêntico para o ponto B considerado pertencente a qualquer das barras. Assim, o trabalho realizado pela força de contato F_B em cada corpo possui sinais opostos, pois as forças são opostas (princípio da ação e reação). Assim, o trabalho das forças internas em B é também nulo. De maneira formal, utilizando índices ***e*** para o lado esquerdo e ***d*** para o lado direito do mecanismo:

$$\underset{t_0\to t_1}{\tau}^{\vec{F}B} = \underset{t_0\to t_1}{\tau}^{\vec{F}B_d} + \underset{t_0\to t_1}{\tau}^{\vec{F}B_e} = \int(\vec{F}_{B_d}+\vec{F}_{B_e})\bullet d\vec{r} = \int(\vec{F}_{B_d}-\vec{F}_{B_d})\bullet d\vec{r} = \underset{t_0\to t_1}{\tau}^{\vec{F}B_d} - \underset{t_0\to t_1}{\tau}^{FB_d} = 0$$

ou seja, o trabalho interno do par ação-reação na articulação sem atrito é nulo.

$$\underset{t_0\to t_1}{\tau}^{\vec{F}C} = \underset{t_0\to t_1}{\tau}^{N} = 0 \ \ (\text{em } C, \text{a única força existente é normal ao deslocamento})$$

Restam os trabalhos dos pesos aplicados nos baricentros das barras AB e BC que, entre a posição inicial e a final (horizontal, mostrada na figura a seguir) é:



$$\underset{t_0\to t_1}{\tau^{\vec{F}G_1}} + \underset{t_0\to t_1}{\tau^{\vec{F}G_2}} = 2mg\left(\frac{L}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + mg\left(\frac{L}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\underset{t_0\to t_1}{\tau^{\vec{F}G_1}} + \underset{t_0\to t_1}{\tau^{\vec{F}G_2}} = 3mg\left(\frac{L\sqrt{2}}{4}\right)}$$

c e d) Pelo TEC e considerando que na condição inicial (repouso) a energia cinética do sistema é nula,

$$\underset{t_0\to t_1}{\tau^{\vec{F}G_1}} + \underset{t_0\to t_1}{\tau^{\vec{F}G_2}} = \Delta EC(AB) + \Delta EC(BC) \Rightarrow$$

$$3mg\left(\frac{L\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{1}{2}(2m)v^2{}_B + \frac{1}{2}J_{B_z}\omega^2{}_{AB} + \frac{1}{2}(m)v^2{}_B + \frac{1}{2}J_{B_z}\omega^2{}_{BC} \Rightarrow$$

$$3mg\left(\frac{L\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{1}{2}(2m)v^2{}_B + \frac{1}{2}\left(J_{G1_z} + 2m\frac{L^2}{4}\right)\omega^2{}_{AB} + \frac{1}{2}(m)v^2{}_B + \frac{1}{2}\left(J_{G2_z} + m\frac{L^2}{4}\right)\omega^2{}_{BC}$$

As relações entre a velocidade de B e os vetores rotação é obtida da cinemática:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{AB} \wedge (B - A) = \vec{0} + \omega_{AB}\vec{k} \wedge L\vec{i} \Rightarrow$$

$$\vec{v}_B = \omega_{AB}L\vec{j}$$

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{BC} \wedge (C - B) = \omega_{AB}L\vec{j} + \omega_{BC}\vec{k} \wedge L\vec{i} \Rightarrow$$

$$v_C\vec{i} = \omega_{AB}L\vec{j} + \omega_{BC}L\vec{j} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} v_C = |\vec{v}_C| = 0 \\ \omega_{AB} = -\omega_{BC} \end{matrix}\right\}$$

Substituindo-se as expressões para a velocidade de B e as velocidades angulares de AB e BC na equação do TEC tem-se:

$$3mg\left(\frac{L\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{1}{2}(2m)\omega^2{}_{AB}L^2 + \frac{1}{2}\left(2m\frac{L^2}{12} + 2m\frac{L^2}{4}\right)\omega^2{}_{AB} + \frac{1}{2}(m)\omega^2{}_{AB}L^2 + \frac{1}{2}\left(m\frac{L^2}{12} + m\frac{L^2}{4}\right)\omega^2{}_{AB} \Rightarrow$$

$$\omega^2{}_{AB} = \frac{3\sqrt{2}}{8}\frac{g}{L}$$

Portanto:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{\omega}_{AB} &= \left(\frac{3\sqrt{2}}{8}\frac{g}{L}\right)^{1/2}\vec{k} \quad \text{(c)} \\ \vec{\omega}_{BC} &= -\left(\frac{3\sqrt{2}}{8}\frac{g}{L}\right)^{1/2}\vec{k} \quad \text{(d)} \end{aligned}}$$