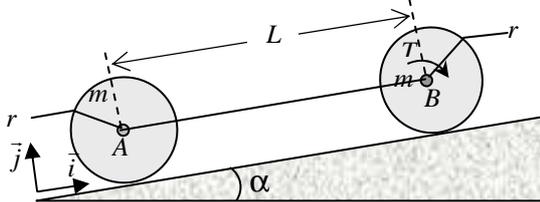




PME 2100 – MECÂNICA A – P3 – 26 de junho de 2009
Duração da Prova: 120 minutos (não é permitido uso de calculadoras)

ATENÇÃO: a prova consta de 3 questões de aplicação da teoria estudada valendo 10 pontos e de 4 questões teóricas, cuja resposta é opcional, com valor total de 2 pontos, e cujo resultado obtido é somado ao valor das questões de aplicação. **A nota máxima da prova é 10, ou seja, não há acumulação de pontos para as avaliações subsequentes.**

QUESTÃO 1 (3,5 pontos). Dois cilindros iguais de raio r e massa m , interligados por meio de articulações a um cabo inextensível AB de comprimento L e **massa desprezível**, sobem uma rampa de inclinação α sob a ação de um torque T aplicado ao cilindro dianteiro. Admitindo-se que ambos os cilindros rolem sem escorregar e que o coeficiente de atrito entre eles e a rampa seja μ , determinar:



- Os diagramas de corpo livre dos dois cilindros.
- A aceleração angular dos cilindros.
- A força de tração no fio AB .
- O máximo valor do torque aplicado em B para que não ocorra escorregamento do cilindro dianteiro.

É dado o momento de inércia baricêntrico do cilindro em relação ao eixo z : $J_{Gz} = \frac{1}{2}mr^2$

SOLUÇÃO

Ambos os cilindros realizam movimento de rolamento puro. O cilindro traseiro movimenta-se sob a ação da força peso, da reação normal de contacto \vec{N}_2 , da força $F\vec{i}$, transmitida pelo fio AB e da força de atrito $-H_2\vec{i}$; o cilindro dianteiro move-se sob a ação da força peso, da reação normal de contacto \vec{N}_1 , do torque $-T\vec{k}$ aplicado ao eixo, da força $-F\vec{i}$, transmitida pelo fio, e da força de atrito $H_1\vec{i}$.



(Resposta a)

Aplicando-se ao cilindro traseiro o TMB e o TMA relativamente ao centro instantâneo de rotação I_2 , tem-se:

$$F - H_2 - mg \sin \alpha = ma \quad (\text{Eq.1})$$

$$N_2 - mg \cos \alpha = 0 \quad (\text{Eq.2})$$

$$mgr \sin \alpha - Fr = J_{I_2z} \dot{\omega} = \left(\frac{1}{2}mr^2 + mr^2 \right) (-\dot{\omega}) = -\frac{3}{2}mr^2 \dot{\omega} \quad (\text{Eq.3})$$

Aplicando-se ao cilindro dianteiro o TMB e o TMA relativamente ao centro instantâneo de rotação I_1 , tem-se:

$$H_1 - F - mg \sin \alpha = ma \quad (\text{Eq.4})$$

$$N_1 - mg \cos \alpha = 0 \quad (\text{Eq.5})$$



$$Fr + mgr \sin \alpha - T = J_{I_z}(-\dot{\omega}) = -\frac{3}{2}mr^2\dot{\omega} \quad (\text{Eq.6})$$

Como ambos os cilindros realizam movimento de rolamento puro, pode-se escrever:

$$a = \dot{\omega}r \quad (\text{Eq.7})$$

Somando-se as equações (3) e (6), obtém-se:

$$2mgr \sin \alpha - T = -3mr^2\dot{\omega}$$
$$\therefore \dot{\omega} = \frac{T - 2mgr \sin \alpha}{3mr^2} \quad (\text{Eq.8})$$

(Resposta b)

Substituindo-se (8) em (3), obtém-se:

$$F = mg \sin \alpha + \frac{3}{2}mr\dot{\omega} = mg \sin \alpha + \frac{1}{2r}(T - 2mgr \sin \alpha)$$
$$\therefore F = \frac{T}{2r} \quad (\text{Eq.9})$$

(Resposta c)

Substituindo-se (7) e (9) em (4), obtém-se:

$$H_1 = \frac{T}{2r} + mg \sin \alpha + \frac{T - 2mgr \sin \alpha}{3r}$$
$$\therefore H_1 = \frac{5T}{6r} + \frac{mg \sin \alpha}{3} \quad (\text{Eq.10})$$

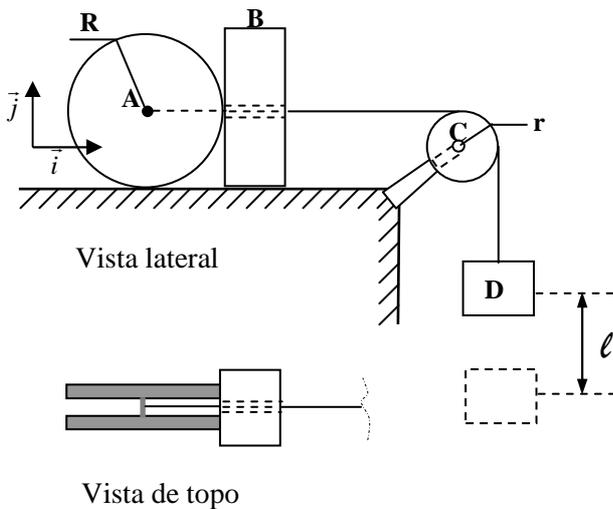
Para que não ocorra deslizamento do cilindro dianteiro, deve-se ter:

$$H_1 = \frac{5T}{6r} + \frac{mg \sin \alpha}{3} \leq \mu N_1 = \mu mg \cos \alpha$$
$$\therefore T \leq \frac{2}{5}(3\mu \cos \alpha - \sin \alpha)mrg \quad (\text{Eq.11})$$

(Resposta d)



QUESTÃO 2 (3,0 pontos). No diagrama abaixo, o carretel (baricentro A , massa m e raio de giração ρ) é ligado, por um cabo ideal, através de uma polia homogênea (centro C , massa m e raio r) a um bloco homogêneo D de massa M . Além disso, o cabo atravessa, por meio de um furo, o interior de um bloco homogêneo B de massa M que se mantém em contato permanente e sem atrito com o carretel. Entre o carretel e o plano horizontal e entre o bloco B e o referido plano há atrito cujo coeficiente é μ . O sistema é abandonado a partir do repouso e, após percorrer a distância ℓ (dada) o bloco D possui velocidade desconhecida de módulo v . Sabe-se que o movimento do carretel é de rolamento puro, que não há atrito no mancal em C e que não ocorre tombamento do bloco B . Nestas condições, pede-se, em função dos dados do problema:



- o diagrama de corpo livre da polia, do carretel e dos blocos B e D ;
- a expressão da energia cinética do sistema em um instante $t > 0$ qualquer.
- a velocidade v do bloco D após este ter percorrido a distância ℓ .

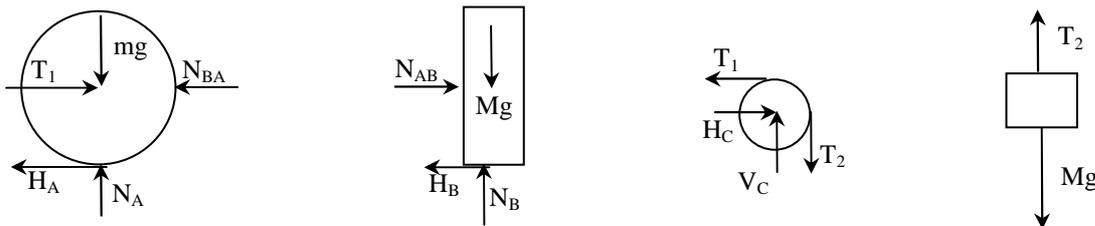
Dados:

Momento de inércia baricêntrico do carretel relativo ao eixo z : $J_{Az} = m\rho^2$

Momento de inércia baricêntrico da polia relativo ao eixo z : $J_{Cz} = \frac{1}{2}mr^2$

SOLUÇÃO

Nas figuras a seguir são apresentados os diagramas de corpo livre do carretel, da polia e dos blocos.



(Resposta a)

Analisando-se o trabalho das forças externas e internas que atuam sobre o sistema constituído pelo carretel, pela polia e pelos dois blocos, notamos que:

- As reações na articulação C (H_C, V_C) não realizam trabalho, pois C é um ponto fixo;
- A reação $-H_A\vec{i} + N_A\vec{j}$, no contato do disco com o plano, realiza trabalho nulo, pois se aplica a pontos do disco coincidentes com seu centro instantâneo de rotação;
- As reações no contacto entre o carretel e o bloco, ou seja, $-N_{AB}\vec{i}$ e $N_{AB}\vec{i}$, são normais à velocidade relativa do ponto de contato; logo, seu trabalho é nulo;
- A reação normal $N_B\vec{j}$ produz trabalho nulo, pois é perpendicular à direção da velocidade de deslizamento do bloco;



- Como o cabo é inextensível, é nulo o trabalho realizado pelas forças de tração que se desenvolvem ao longo de seu comprimento, uma vez que estas são pares ação/reação aplicados a pontos que têm o mesmo deslocamento;
- O trabalho realizado pela força peso do carretel é nulo, pois tem direção normal ao deslocamento de seu baricentro A .

Portanto, o trabalho total realizado pelas forças atuantes no sistema considerado corresponde às contribuições dos trabalhos da força peso do bloco D e da força H_B no contacto entre o bloco B e o plano horizontal, ou seja:

$$\tau(0, t) = Mg \ell - H_B \ell = (Mg - H_B) \ell \quad (\text{Eq.1})$$

No entanto, sabemos que H_B é uma força de atrito e que, como o bloco B se encontra em movimento, o seu valor é dado por:

$$H_B = \mu N_B = \mu Mg \quad (\text{Eq.2})$$

Analisando-se a variação da energia cinética T do sistema, observamos que, no instante inicial,

$$T(0) = 0$$

uma vez todos os sólidos se encontram em repouso nesse instante. Para um instante qualquer t , as energias cinéticas do carretel A , do bloco B , da polia C e do bloco D são dadas, respectivamente, por:

$$T_A(t) = \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} J_{A_c} \omega_A^2 = \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} m \rho^2 \omega_A^2 \quad (\text{Eq.3})$$

$$T_B(t) = \frac{1}{2} M v_B^2 \quad (\text{Eq.4})$$

$$T_C(t) = \frac{1}{2} J_{C_c} \omega_C^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{m r^2}{2} \right) \omega_C^2 = \frac{1}{4} J_{C_c} \omega_C^2 \quad (\text{Eq.5})$$

$$T_D(t) = \frac{1}{2} M v_D^2 \quad (\text{Eq.6})$$

Portanto, a energia cinética do sistema no sistema no instante t , é:

$$T(t) = \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} m \rho^2 \omega_A^2 + \frac{1}{2} M v_B^2 + \frac{1}{4} m r^2 \omega_C^2 + \frac{1}{2} M v_D^2 \quad (\text{Eq.7})$$

Como o movimento do carretel é de rolamento puro, a velocidade de seu baricentro A é dada por:

$$v_A = \omega_A R \quad (\text{Eq.8})$$

Essa é também a velocidade do bloco B , que se move em contacto permanente com o carretel, ou seja:

$$v_B = v_A = \omega_A R \quad (\text{Eq.9})$$

Como o cabo é inextensível e não existe deslizamento entre este e a polia C , a velocidade do bloco D é:

$$v_D = \omega_C r \quad (\text{Eq.10})$$



Além disso, pelo fato de o cabo ser inextensível, a seguinte relação cinemática entre as velocidades angulares da polia e do carretel se estabelece:

$$\omega_A R = \omega_C r \quad (\text{Eq.11})$$

Substituindo-se as equações (8)-(10) em (7), obtém-se:

$$T(t) = \frac{1}{2} m \omega_A^2 R^2 + \frac{1}{2} m \omega_A^2 \rho^2 + \frac{1}{2} M \omega_A^2 R^2 + \frac{1}{4} m \omega_A^2 R^2 + \frac{1}{2} M \omega_A^2 R^2 = MR^2 \omega_A^2 + m \left(\frac{3}{4} R^2 + \frac{1}{2} \rho^2 \right) \omega_A^2 \quad (\text{Eq.12})$$

Substituindo-se a equação (2) em (12) e aplicando-se o Teorema da Energia Cinética desde o instante inicial até o instante t_f , correspondente a um deslocamento ℓ , do bloco, obtém-se:

$$MR^2 \omega_A^2 + m \left(\frac{3}{4} R^2 + \frac{1}{2} \rho^2 \right) \omega_A^2 = (Mg - \mu Mg) \ell \Rightarrow \frac{\omega_A^2}{4} [4MR^2 + m(3R^2 + 2\rho^2)] = (Mg - \mu Mg) \ell$$

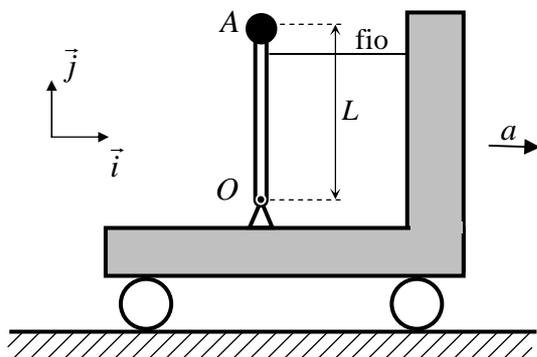
$$\therefore \omega_A = 2 \cdot \sqrt{\frac{Mg(1-\mu)\ell}{4MR^2 + m(3R^2 + 2\rho^2)}} \quad (\text{Eq.13})$$

Portanto, a velocidade v do bloco D após este ter percorrido a distância ℓ será:

$$v = 2R \cdot \sqrt{\frac{Mg(1-\mu)\ell}{4MR^2 + m(3R^2 + 2\rho^2)}} \quad (\text{Eq.14})$$

(Resposta c)

QUESTÃO 3 (3,5 pontos). No dispositivo da figura, o carrinho se movimenta para a direita com aceleração constante a , carregando uma barra de massa desprezível, de comprimento L , em cuja extremidade se localiza uma massa concentrada m . A barra OA é articulada em O e mantida na vertical através de um fio de massa desprezível. Admitindo-se que o fio se rompa num determinado instante, determinar, para essa condição:

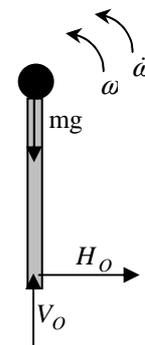


- O diagrama de corpo livre da barra OA .
- A aceleração angular da barra OA .
- As reações na articulação O da barra OA .

SOLUÇÃO

O diagrama de corpo livre da barra AO , no instante em que o fio é cortado, é apresentado na Figura ao lado. **(Resposta a)**

Notando que o baricentro da barra coincide com o ponto A , o TMA em relação ao pólo O fornece:





$$m(A-O) \wedge \vec{a}_O + J_{O_z} \dot{\omega}_z \vec{k} = \vec{M}_O^{ext} \quad (\text{Eq.1})$$

Como o momento das forças externas atuantes na barra AO em relação ao pólo O é nulo e o seu momento de inércia corresponde apenas ao da massa concentrada em A (ou seja, $J_{O_z} = mL^2$), resulta:

$$mL\vec{j} \wedge a\vec{i} + mL^2 \dot{\omega} \vec{k} = \vec{0}$$
$$\therefore -a + L\dot{\omega} = 0 \Rightarrow \dot{\omega} = \frac{a}{L} \quad (\text{Eq.2})$$

(Resposta b)

Aplicando-se o TMB à barra AO , obtém-se:

$$H_O = ma_A$$
$$-mg + V_O = 0 \quad (\text{Eq.3})$$

Mas a aceleração absoluta do ponto A é dada por:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \dot{\omega} \vec{k} \wedge (A-O) = a\vec{i} + \dot{\omega} \vec{k} \wedge L\vec{j} = (a - L\dot{\omega})\vec{i} \quad (\text{Eq.4})$$

Substituindo-se o valor de $\dot{\omega}$ na equação acima, resulta que, no instante considerado, a aceleração absoluta do ponto A é nula, ou seja:

$$\vec{a}_A = \left(a - L \frac{a}{L} \right) \vec{i} = \vec{0} \quad (\text{Eq.5})$$

Portanto, no instante referido, as reações na articulação O , são:

$$H_O = 0$$
$$V_O = mg \quad (\text{Eq.6})$$

(Resposta c)

QUESTÃO 4 (0,5 pontos). Mostre que, se um corpo realiza movimento de translação, o momento das forças externas em relação ao baricentro é nulo.

SOLUÇÃO

Particularizando-se a expressão geral do Teorema do Momento Angular, ou seja,

$$\dot{\vec{H}}_O = m(G-O) \wedge \vec{a}_O + \left[\vec{\omega} \wedge \vec{i} \quad \vec{\omega} \wedge \vec{j} \quad \vec{\omega} \wedge \vec{k} \right] \cdot \begin{bmatrix} J_{O_x} & -J_{O_{xy}} & -J_{O_{xz}} \\ -J_{O_{xy}} & J_{O_y} & -J_{O_{yz}} \\ -J_{O_{xz}} & -J_{O_{yz}} & J_{O_z} \end{bmatrix} \cdot [\omega] + \left[\vec{i} \quad \vec{j} \quad \vec{k} \right] \cdot \begin{bmatrix} J_{O_x} & -J_{O_{xy}} & -J_{O_{xz}} \\ -J_{O_{xy}} & J_{O_y} & -J_{O_{yz}} \\ -J_{O_{xz}} & -J_{O_{yz}} & J_{O_z} \end{bmatrix} \cdot [\omega] = \vec{M}_O^{ext}$$

(onde $[\omega]^T = [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]$), para o caso de movimento de translação ($\vec{\omega} = \vec{0}$ e $\dot{\vec{\omega}} = \vec{0}$), e utilizando como pólo o próprio baricentro G do corpo, resulta:



$$\therefore \dot{\vec{H}}_G = m(\vec{G} - G) \wedge \vec{a}_G = \vec{0} = \vec{M}_G^{ext} \quad (\text{C.Q.D.})$$

QUESTÃO 5 (0,5 pontos). Seja B um corpo homogêneo contendo um eixo z de simetria. Mostre que os produtos de inércia de B em relação a um par de eixos ortogonais quaisquer, dos quais um coincide com z , são sempre nulos.

SOLUÇÃO

Considerando o sólido um sistema de massas puntuais m_i situadas em posições fixas $P_i(x_i, y_i, z_i)$ referidas a um referencial $Oxyz$, as expressões dos produtos de inércia J_{Oxz} e J_{Oyz} são, respectivamente:

$$J_{Oxz} = \sum_{i=1}^n m_i x_i z_i \quad \text{e} \quad J_{Oyz} = \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i$$

Como o sólido é homogêneo, as somatórias acima podem ser assim reescritas na forma:

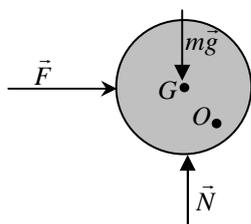
$$J_{Oxz} = \rho \Delta x \Delta y \Delta z \sum_{i=1}^n x_i z_i \quad \text{e} \quad J_{Oyz} = \rho \Delta x \Delta y \Delta z \sum_{i=1}^n y_i z_i$$

E como z é um eixo de simetria, a cada produto $x_i z_i$ corresponderá um produto simétrico $x_i(-z_i)$, o mesmo ocorrendo em relação aos produtos $y_i z_i$ e $y_i(-z_i)$. Portanto, conclui-se que os produtos de inércia J_{Oxz} e J_{Oyz} são nulos (C.Q.D.).

QUESTÃO 6 (0,5 pontos). Considere uma esfera de massa m inicialmente em repouso apoiada sobre uma superfície plana xy sem atrito e à qual se aplica uma força \vec{F} , paralela à direção x e com linha de ação passante pelo seu baricentro. O que se pode afirmar a respeito do momento angular dessa esfera? Justifique.

SOLUÇÃO

A figura abaixo representa o diagrama de corpo livre da esfera, nas condições indicadas no problema.



Utilizando-se a expressão geral do TMA para um sistema de pontos materiais, relativamente a um ponto O arbitrário, tem-se:

$$\dot{\vec{H}}_O = m\vec{v}_G \wedge \vec{v}_O + \vec{M}_O^{ext}$$

Adotando-se, porém, o baricentro como pólo, chega-se a $\dot{\vec{H}}_G = \vec{M}_G^{ext}$.

Aplicando-se essa expressão ao problema focalizado, concluímos que $\dot{\vec{H}}_G = \vec{0} \Rightarrow \vec{H}_G = const$.

Em outras palavras, podemos afirmar que o momento angular do sistema se conserva. Como inicialmente a esfera não possuía movimento de rotação, a aplicação de F ao seu baricentro não ocasiona mudança em seu momento angular, que se mantém nulo. Portanto, essa força apenas acelera o baricentro da esfera, que passa a realizar movimento de translação.

QUESTÃO 7 (0,5 pontos). Mostre que, para um corpo sólido realizando movimento qualquer, o trabalho das forças internas é nulo.

SOLUÇÃO



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. CEP 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

Representando as forças internas desenvolvidas entre os pontos materiais de um sólido situados nas posições P_i e P_j na forma

$$\vec{F}_{ij} = \lambda_{ij}(P_j - P_i) \quad \text{e} \quad \vec{F}_{ji} = \lambda_{ji}(P_i - P_j)$$

e notando que, pelo Princípio de Ação e Reação, deve-se ter $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$ e, portanto, $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$, o trabalho realizado pelo sistema de forças internas \vec{F}_{ij} durante um deslocamento arbitrário δs do sólido será dado por:

$$\tau = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \vec{F}_{ij} \cdot \delta s = \delta s \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \lambda_{ij} (P_j - P_i) = 0 = \delta s \vec{R}^{\text{int}} = 0$$

Como o sistema de forças internas tem resultante \vec{R}^{int} nula, conclui-se, da expressão acima, que é nulo o trabalho realizado pelas forças internas de um sólido. (**C.Q.D.**).