ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

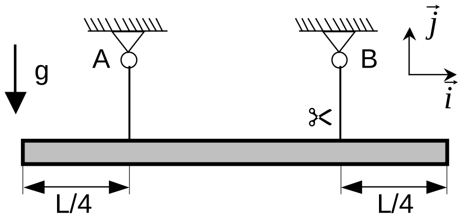
Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

MECÂNICA A – PME 2100 - Terceira Prova – 25 de junho de 2002

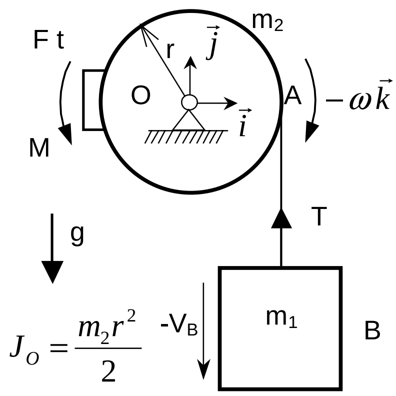
Duração da Prova: 100 minutos (não é permitido uso de calculadoras)
seminário ou exercício em classe ou lista de exercícios (1,0 ponto)

1ª Questão (3,0 pontos)



A barra homogênea de massa $\boldsymbol{m}$ e comprimento $\boldsymbol{L}$ está suspensa por dois fios inextensíveis fixados conforme mostrado na figura. O momento de inércia da barra em relação ao baricentro é $I_G = mL^2/12$. Determinar a força de tração $\boldsymbol{T}$ do fio em **A,** quando o fio em **B** for cortado.

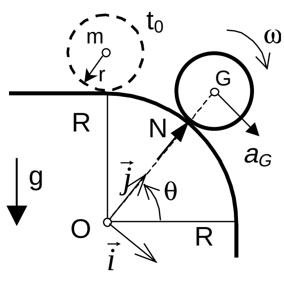
2ª Questão (3,0 pontos)



Um elevador de massa $\boldsymbol{m_1}$ é baixado pelo cabo enrolado no disco articulado em O mostra na figura. No instante $t_0 = 0$ uma sapata de freio aplica no disco de massa $\boldsymbol{m_2}$ e raio **r**, um momento $\boldsymbol{M}$ de frenagem, proporcional ao tempo ($M = Ft$, onde F é uma constante). Considerando que a velocidade do elevador no instante inicial t_0 da frenagem seja $-V_B$ e o momento de inércia do disco seja J_O, pede-se:

a) fazer o diagrama de corpo livre do elevador e determinar a tensão $\boldsymbol{T}$ no cabo em função da aceleração angular do disco $\dot{\omega}$.
b) determinar a aceleração vertical a_B do elevador.
c) determinar a velocidade angular ω do disco.

3ª Questão (3,0 pontos)



Um cilindro homogêneo de raio $\boldsymbol{r}$ e peso $\boldsymbol{mg}$, rola sem escorregar sobre a superfície **O** fixa. No instante $t_0 = 0$ o cilindro repousa na posição $\theta = 90°$ e uma pequena perturbação inicia o movimento para a direita, sobre a parte cilíndrica de raio $\boldsymbol{R}$ da superfície. Pede-se determinar:

a) a velocidade angular do cilindro ω em função de θ.
b) a aceleração do centro $\boldsymbol{G}$ do cilindro expressa nas coordenadas auxiliares móveis $O\vec{i}\,\vec{j}$.
c) a componente normal $\boldsymbol{N}$ da reação do cilindro sobre o plano em função de θ
d) o valor de θ para o qual o cilindro perde o contato com a superfície.

Dado: $J_{G,z} = \dfrac{mr^2}{2}$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

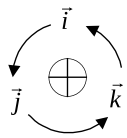
Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

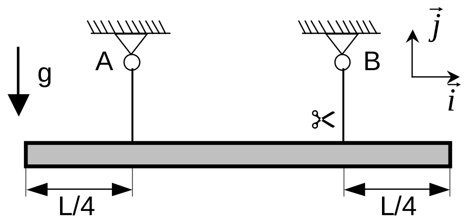
MECÂNICA A – PME 2100 - Terceira Prova – 25 de junho de 2002

Duração da Prova: 100 minutos (não é permitido uso de calculadoras)
seminário ou exercício em classe ou lista de exercícios (1,0 ponto)

Resolução da Prova



1ª Questão (3,0 pontos)

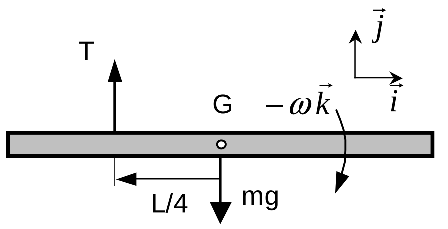


A barra homogênea de massa ***m*** e comprimento ***L*** está suspensa por dois fios inextensíveis fixados conforme mostrado na figura. O momento de inércia da barra em relação ao baricentro é $I_G = mL^2/12$. Determinar a força de tração ***T*** do fio em **A** quando o fio em **B** for cortado.

Aplicando o **TMB** no diagrama de corpo livre mostrado ao lado:

$$\boxed{ma_G = T - mg}$$ (0,5 ponto)

Do **TMA** obtêm-se



$$I_G\dot{\omega} = T\left(-\frac{L}{4}\right) \qquad \frac{mL^2}{12}\dot{\omega} = -\frac{TL}{4}$$

$$\boxed{\dot{\omega} = -\frac{3T}{mL}}$$ (1,0 ponto)

Relação cinemática considerando fio em **A** inextensível:

$$a_G = \dot{\omega}\frac{L}{4} \qquad \boxed{a_G = -\frac{3T}{4m}}$$ (0,5 ponto)

Substituindo na primeira expressão resulta em:

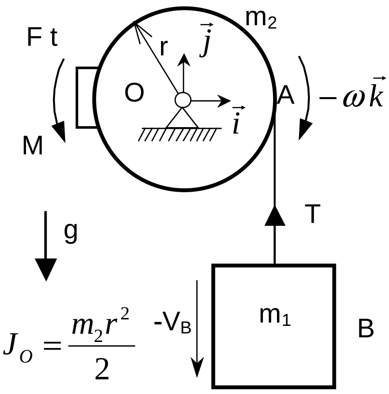
$$-\frac{3T}{4} = T - mg \qquad \boxed{T = \frac{4}{7}mg}$$ (1,0 ponto)

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

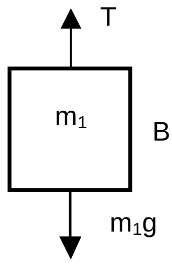
2ª Questão (3,0 pontos) - **Resolução**



$$J_O = \frac{m_2 r^2}{2}$$

Um elevador de massa $\boldsymbol{m_1}$ é baixado pelo cabo enrolado no disco articulado em O mostra na figura. No instante $\boldsymbol{t_0} = 0$ uma sapata de freio aplica no disco de massa $\boldsymbol{m_2}$ e raio **r**, um momento $\boldsymbol{M}$ de frenagem, proporcional ao tempo ($\boldsymbol{M} = \boldsymbol{F}t$, onde $\boldsymbol{F}$ é uma constante). Considerando que a velocidade do elevador no instante inicial $\boldsymbol{t_0}$ da frenagem seja $\boldsymbol{-V_B}$ e o momento de inércia do disco seja $\boldsymbol{J}_O$, pede-se:

a) fazer o diagrama de corpo livre do elevador e determinar a tensão $\boldsymbol{T}$ no cabo em função da aceleração angular do disco $\dot{\omega}$.



Aplicando o **TMB** no corpo B:

$m\vec{a}_G = \vec{F}^{ext}$ $\qquad m a_B \vec{j} = (T - m_1 g)\vec{j}$

da relação cinemática entre o cabo e o disco tem-se: $\vec{V}_B = \vec{V}_O + \vec{\omega} \wedge (A - O)$

$\vec{V}_B = 0 + \omega\vec{k} \wedge r\vec{i} = \omega r \vec{j}$ $\qquad \vec{a}_B = \dot{\omega} r \vec{j}$

$m_1 \dot{\omega} r = T - m_1 g$ $\qquad \boxed{T = m_1(\dot{\omega} r + g)}$ (1,0 ponto)

b) determinar a aceleração vertical $\boldsymbol{a_B}$ do elevador. O momento angular do disco em relação ao pólo O fixo fornece:

$\vec{H}_O = J_{Oz}\omega\vec{k}$ $\qquad \vec{H}_O = \frac{1}{2} m_2 r^2 \omega \vec{k}$ o diagrama de corpo livre e o **TMA** para o disco fornecem:

$\dot{\vec{H}}_O = \vec{M}_O^{ext}$ $\qquad \frac{1}{2} m_2 r^2 \dot{\omega}\vec{k} = (M - rT)\vec{k}$ $\qquad \frac{1}{2} m_2 r^2 \dot{\omega} = M - m_1 \dot{\omega} r^2 - m_1 r g$

$\dot{\omega} = \dfrac{2(M - m_1 r g)}{(m_2 + 2m_1) r^2}$ devido a relação cinemática $\vec{a}_B = \dot{\omega} r \vec{j}$ $\qquad \boxed{a_B = \dfrac{2(M - m_1 r g)}{(m_2 + 2m_1) r}}$ (1,0 ponto)

c) determinar a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ do disco: como $\dot{\omega} = d\omega/dt$ e $M = F\,t$ integrando os dois lados

$d\dot{\omega} = \dfrac{2(Ft - m_1 r g)}{(m_2 + 2m_1) r^2} dt$ $\qquad \displaystyle\int_{\omega_o}^{\omega} d\dot{\omega} = \frac{2}{(m_2 + 2m_1) r^2} \int_{t_0}^{t} (Ft - m_1 r g)\, dt$ $\qquad \boxed{\omega = \dfrac{Ft^2 - 2m_1 r g t}{(m_2 + 2m_1) r^2} + \dfrac{(-V_B)}{r}}$

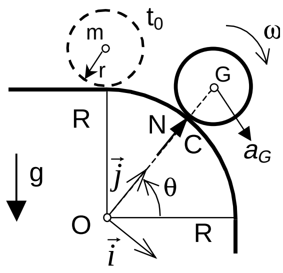
(1,0 ponto)

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

3ª Questão (3,0 pontos) - **Resolução**



Um cilindro homogêneo de raio ***r*** e peso ***mg***, rola sem escorregar sobre a superfície **O** fixa. No instante $t_0 = 0$ o cilindro repousa na posição $\theta = 90°$ e uma pequena perturbação inicia o movimento para a direita, sobre a parte cilíndrica de raio ***R*** da superfície.

Dado: $J_{G,z} = \dfrac{mr^2}{2}$

a) a velocidade angular do cilindro ω em função de θ. Utilizando o Teorema da Energia (**TE**) obtêm-se:

$$\frac{1}{2}mV_G^2 + \frac{1}{2}J_{Gz}\omega^2 = mg(R+r)(1-\operatorname{sen}\theta) \quad \text{como} \quad V_G = \omega r \quad \frac{1}{2}mr^2\omega^2 + \frac{1}{2}\frac{mr^2}{2}\omega^2 = mg(R+r)(1-\operatorname{sen}\theta)$$

$$\frac{3}{4}mr^2\omega^2 = mg(R+r)(1-\operatorname{sen}\theta) \qquad \boxed{\omega^2 = \frac{4g(R+r)}{3r^2}(1-\operatorname{sen}\theta)}$$

(1,0 ponto)

b) a aceleração do centro ***G*** do cilindro expressa nas coordenas auxiliares móveis $O\vec{i}\,\vec{j}$. Considerando o ponto ***C*** de contato:

$$\vec{V}_G = \vec{V}_C + \vec{\omega} \wedge (G-C) \qquad \vec{V}_G = 0 - \omega\vec{k} \wedge r\,\vec{j} \qquad \vec{V}_G = \omega r\,\vec{i}$$

(observe que a aceleração do ponto ***C*** não é nula)

para movimento circular: $\vec{a}_G = \dot{V}_G\,\vec{i} - \dfrac{V_G^2}{(R+r)}\vec{j}$ $\qquad \boxed{\vec{a}_G = \dot{\omega} r\,\vec{i} - \dfrac{\omega^2 r^2}{(R+r)}\vec{j}}$ (1,0 ponto)

c) a componente normal ***N*** da reação do cilindro sobre o plano em função de θ

utilizando o **TMB** tem-se: $m\vec{a}_G = \vec{F}^{ext}$ na direção $\vec{j}$ $\qquad -m\dfrac{\omega^2 r^2}{(R+r)} = N - mg\operatorname{sen}\theta$

$$N = m\left(g\operatorname{sen}\theta - \omega^2\frac{r^2}{(R+r)}\right) \qquad N = m\left(g\operatorname{sen}\theta - \frac{4g(R+r)}{3r^2}\frac{r^2}{(R+r)}\right) \qquad \boxed{N = \frac{mg}{3}(7\operatorname{sen}\theta - 4)}$$

(0,5 ponto)

d) o valor de θ para o qual o cilindro perde o contato com a superfície.

para $N = 0$ $\qquad \boxed{\operatorname{sen}\theta = \dfrac{4}{7}}$ (0,5 ponto)