ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

Mecânica I PME 3100 Prova nº3 Data 12 / 12 / 2023

Duração da Prova: 120 minutos - Prova sem consulta.
Não é permitido o porte de calculadoras, "tablets", celulares e dispositivos similares.

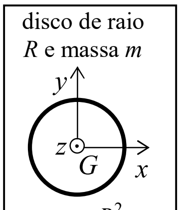
1ª Questão (3,0 pontos) O disco de massa m e raio R rola sem escorregar em relação ao bloco móvel B, sob a ação da força F, conforme mostrado na figura. O coeficiente de atrito entre o disco e o bloco móvel B é μ.

O bloco móvel B, de massa M, se move sem atrito em relação ao solo.

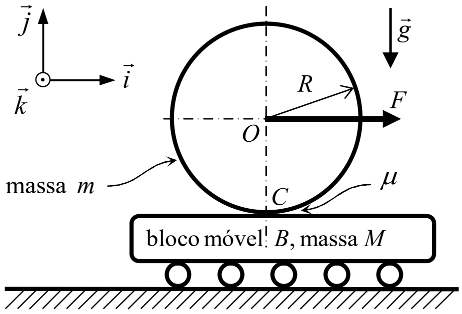
a – (1,0 ponto) Desenhe o diagrama de corpo livre do disco e o diagrama de corpo livre do bloco móvel B.

b – (1,0 ponto) Usando o Teorema da Resultante e o Teorema do Momento da Quantidade de Movimento, calcule a aceleração angular $\dot{\omega}$ do disco e a aceleração a_B do bloco móvel B.

c – (1,0 ponto) Determine o valor máximo da força F compatível com o rolamento puro do disco sobre o bloco móvel B.



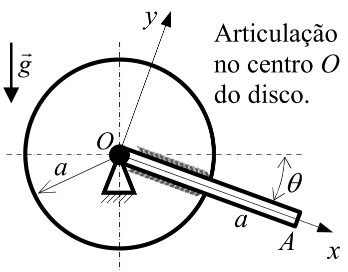
$J_{Gz} = \dfrac{mR^2}{2}$



2ª Questão (3,5 pontos) A barra AO, de massa m e comprimento $2a$, está **soldada** a um disco de massa m e raio a, conforme mostrado na figura. O sistema é liberado do repouso na posição horizontal ($\theta = 0^o$).

a – (0,5 ponto) Determine o momento de inércia J_{Oz} do sólido formado pelo disco e a barra AO em relação ao eixo perpendicular ao plano da figura e que passa pelo ponto O.

Para os itens a seguir, adote $J_{Oz} = Kma^2$, e determine, em função dos parâmetros dados:



barra AO, de comprimento $2a$, soldada no disco de raio a, formando um único sólido

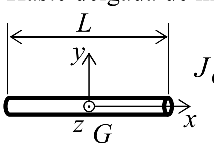
b – (0,5 ponto) a velocidade angular ω do sólido em função de θ, usando o Teorema da Energia Cinética;

c – (0,5 ponto) a aceleração angular $\dot{\omega}$ do sólido em função de θ;

d – (1,0 ponto) o vetor aceleração $\vec{a}_G$ do sólido em função de θ, ω e $\dot{\omega}$;

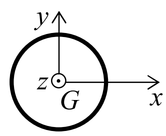
e – (1,0 ponto) as reações R_x e R_y da articulação em O em função de θ, ω e $\dot{\omega}$, usando o Teorema da Resultante.

Dado: Haste delgada de massa m



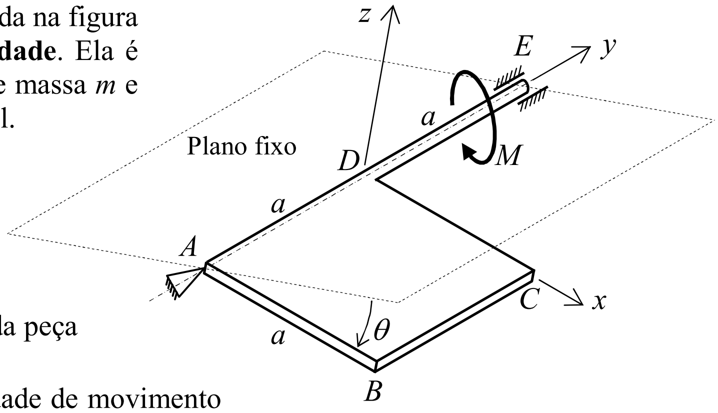
$J_{Gz} = \dfrac{mL^2}{12}$

Disco de raio R e massa m



$J_{Gz} = \dfrac{mR^2}{2}$

3ª Questão (3,5 pontos) A peça $ABCDE$ mostrada na figura faz parte de um satélite no espaço, **sem gravidade**. Ela é formada por uma placa quadrada homogênea de massa m e lado a, soldada à barra DE, de massa desprezível. Essa peça $ABCDE$ é articulada em A, tem um anel em E, e gira em torno de AE acionada por um torque (momento) M variável dado. Pede-se, usando o sistema de coordenadas (D, x, y, z) fixo à peça:



a – (0,5 ponto) faça o diagrama de corpo livre da peça *ABCDE;*

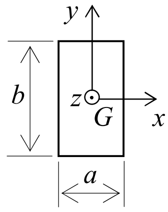
b – (1,0 ponto) obtenha a expressão da quantidade de movimento angular da peça, em relação ao polo D, em função da sua rotação ω $(= \dot{\theta})$;

c – (0,5 ponto) obtenha os momentos e produtos de inércia da peça, envolvidos na expressão obtida no item (b);

d – (1,5 ponto) obtenha as reações em A e E, em função de M e ω, e desenhe o diagrama de corpo livre com as respostas finais.

$J_{Gx} = \dfrac{mb^2}{12}$

$J_{Gz} = \dfrac{m\left(a^2 + b^2\right)}{12}$



GABARITO

1ª Questão - Resolução

a) Diagrama de corpo livre do disco

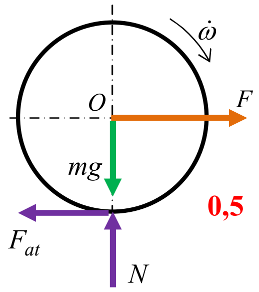
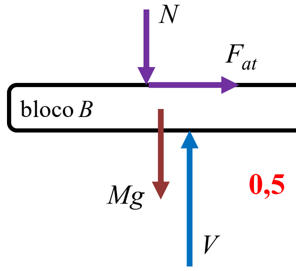


Diagrama de corpo livre do bloco móvel *B*



b) Da cinemática: $\underbrace{\vec{a}_O = a_B\vec{i} + \dot{\omega}R\vec{i}}_{0,3}$, $\quad \dot{\vec{\omega}} = -\dot{\omega}\vec{k}$

Teorema da Resultante no disco:

$m(a_B + \dot{\omega}R) = F - F_{at} \qquad (1)$

$m \cdot 0 = N - mg \Rightarrow N = mg \qquad (2)$

Teorema da Resultante no bloco móvel *B*:

$Ma_B = F_{at} \qquad (3)$

$M \cdot 0 = V - N - Mg \Rightarrow V = N + Mg \qquad (4)$

Teorema do Momento da Quantidade de Movimento no disco:

Adotando o centro de massa como polo: $J_{Oz}\dot{\omega} = F_{at}R \Rightarrow \dfrac{mR^2}{2}\dot{\omega} = F_{at}R \Rightarrow F_{at} = \dfrac{mR}{2}\dot{\omega} \qquad (5)$

0,3
(para as cinco equações)

Substituindo (5) em (3): $Ma_B = F_{at} \Rightarrow Ma_B = \dfrac{mR}{2}\dot{\omega} \Rightarrow a_B = \dfrac{mR}{2M}\dot{\omega} \qquad (6)$

Substituindo (5) e (6) em (1):

$$m(a_B + \dot{\omega}R) = F - F_{at} \Rightarrow m\left(\frac{mR}{2M}\dot{\omega} + \dot{\omega}R\right) = F - \frac{mR}{2}\dot{\omega} \Rightarrow F = m\dot{\omega}\left(\frac{mR}{2M} + R + \frac{R}{2}\right)$$

$$F = m\dot{\omega}\left(\frac{mR}{2M} + \frac{3R}{2}\right) = m\dot{\omega}\left(\frac{mR + 3MR}{2M}\right) \Rightarrow \boxed{\dot{\omega} = \frac{2MF}{mR(m+3M)}} \qquad (7)$$

Substituindo (7) em (6): $a_B = \dfrac{mR}{2M}\dot{\omega} \Rightarrow a_B = \dfrac{mR}{2M}\left[\dfrac{2MF}{mR(m+3M)}\right] \Rightarrow \boxed{a_B = \dfrac{F}{(m+3M)}}$

0,4
(se ambas as respostas estiverem corretas)

c) Substituindo (7) em (5): $F_{at} = \dfrac{mR}{2}\dot{\omega} \Rightarrow F_{at} = \dfrac{mR}{2}\left[\dfrac{2MF}{mR(m+3M)}\right] \Rightarrow F_{at} = \dfrac{MF}{(m+3M)}$

Do modelo de atrito seco no ponto de contato entre o disco e o bloco móvel *B*:

$$\underbrace{F_{at} \le \mu N \Rightarrow \frac{MF}{(m+3M)} \le \mu mg \Rightarrow F \le \frac{\mu mg(m+3M)}{M}}_{0,5} \Rightarrow \boxed{F_{\max} = \frac{\mu mg(m+3M)}{M}}$$

0,5

GABARITO

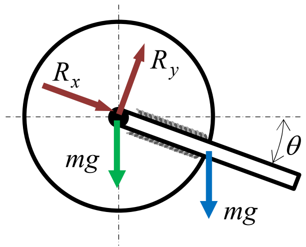
2ª Questão - Resolução

a) $J_{Oz} = J_{Oz,disco} + J_{Oz,barra} = \dfrac{m\,a^2}{2} + J_{Oz,barra}$

Do terorema dos eixos paralelos: $J_{Oz,barra} = \dfrac{m(2a)^2}{12} + m\,a^2 = \dfrac{m\,a^2}{3} + m\,a^2 \Rightarrow J_{Oz,barra} = \dfrac{4}{3} m\,a^2$

Portanto: $J_{Oz} = \dfrac{m\,a^2}{2} + \dfrac{4}{3} m\,a^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{J_{Oz} = \dfrac{11}{6} m\,a^2}$ **0,5**

b) Diagrama de corpo livre do sólido:



Terema da Energia Cinética: $T - T_0 = W^{Ext}$

Como parte do repouso: $T_0 = 0$

Considerando o ponto fixo O: $T = \dfrac{1}{2} J_{Oz}\omega^2$, onde $J_{Oz} = Kma^2$

$T = \dfrac{K}{2} m\,a^2 \omega^2$

Como somente o peso da barra realiza trabalho: $W^{Ext} = mg\,a\text{sen}\theta$

Portanto: $T - T_0 = W^{Ext} \Rightarrow \dfrac{K}{2} m\,a^2\omega^2 - 0 = mg\,a\text{sen}\theta \Rightarrow \omega^2 = \dfrac{2}{K}\dfrac{g}{a}\text{sen}\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = \sqrt{\dfrac{2}{K}\dfrac{g}{a}\text{sen}\theta}}$ **0,5**

c) Derivando a expressão da velocidade angular ω em função do tempo:

$\omega^2 = \dfrac{2}{K}\dfrac{g}{a}\text{sen}\theta \Rightarrow \dfrac{d}{dt}\left(\omega^2\right) = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{2}{K}\dfrac{g}{a}\text{sen}\theta\right) \Rightarrow 2\omega\dot{\omega} = \left(\dfrac{2}{K}\dfrac{g}{a}\cos\theta\right)\dot{\theta} \underset{\dot{\theta}=\omega}{\Rightarrow} \boxed{\dot{\omega} = \dfrac{1}{K}\dfrac{g}{a}\cos\theta}$ **0,5**

d) Observando o diagrama de corpo livre, sabe-se que $(G - O) = \dfrac{a}{2}\vec{i}$ **0,5**

Da cinemática: $\vec{a}_G = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge (G - O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G - O)]$

Também do diagrama de corpo livre, e das expressões de ω e $\dot{\omega}$, temos: $\vec{\omega} = -\omega\vec{k}$ e $\dot{\vec{\omega}} = -\dot{\omega}\vec{k}$

$\vec{a}_G = \vec{0} - \dot{\omega}\vec{k} \wedge \dfrac{a}{2}\vec{i} + \left(-\omega\vec{k}\right) \wedge \left[\left(-\omega\vec{k}\right) \wedge \dfrac{a}{2}\vec{i}\right] \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{a}_G = -\dfrac{a}{2}\dot{\omega}\vec{j} - \dfrac{a}{2}\omega^2\vec{i}}$ **0,5**

e) Teorema da Resultante:

$2m\vec{a}_G = R_x\vec{i} + R_y\vec{j} + 2mg\text{sen}\theta\,\vec{i} - 2mg\cos\theta\,\vec{j}$ **0,5**

Do item anterior temos: $\vec{a}_G = -\dfrac{a}{2}\dot{\omega}\vec{j} - \dfrac{a}{2}\omega^2\vec{i}$

Substituindo: $2m\left(-\dfrac{a}{2}\dot{\omega}\vec{j} - \dfrac{a}{2}\omega^2\vec{i}\right) = R_x\vec{i} + R_y\vec{j} + 2mg\text{sen}\theta\,\vec{i} - 2mg\cos\theta\,\vec{j}$

$R_x = -2mg\text{sen}\theta - 2m\dfrac{a}{2}\omega^2 = -2mg\text{sen}\theta - ma\omega^2 \Rightarrow \boxed{R_x = -m\left(2g\text{sen}\theta + a\omega^2\right)}$

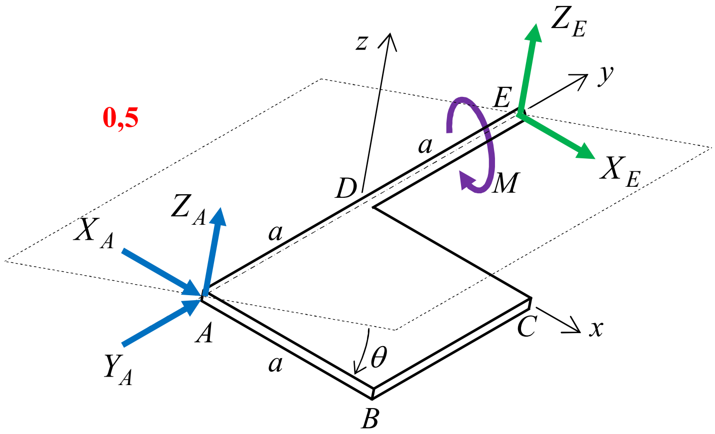
$R_y = -2m\dfrac{a}{2}\dot{\omega} + 2mg\cos\theta = -ma\dot{\omega} + 2mg\cos\theta \Rightarrow \boxed{R_y = m\left(2g\cos\theta - a\dot{\omega}\right)}$

0,5
(0,3 se somente uma resposta estiver correta)

GABARITO

3ª Questão - Resolução

a – Diagrama de corpo livre:



b - Quantidade de movimento angular da peça, em relação ao polo D, com coordenadas (D, x, y, z):

$$\vec{H}_D = m(G-D)\wedge\vec{v}_D +$$
$$+\left(J_{Dx}\omega_x - J_{Dxy}\omega_y - J_{Dxz}\omega_z\right)\vec{i} +$$
$$+\left(-J_{Dyx}\omega_x + J_{Dy}\omega_y - J_{Dyz}\omega_z\right)\vec{j} +$$
$$+\left(-J_{Dzx}\omega_x - J_{Dzy}\omega_y + J_{Dz}\omega_z\right)\vec{k}$$

Observando que $\omega_x = \omega_z = 0$, $\vec{v}_D = \vec{0}$:

$$\boxed{\vec{H}_D = \omega\left(-J_{Dxy}\,\vec{i} + J_{Dy}\,\vec{j}\right)}$$ **1,0**

c – Usando o teorema dos eixos paralelos:

$$J_{Dy} = \frac{ma^2}{12} + m\left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow \boxed{J_{Dy} = \frac{ma^2}{3}}$$

$$J_{Dxy} = J_{Dyx} = 0 + m\frac{a}{2}\left(-\frac{a}{2}\right) \Rightarrow \boxed{J_{Dxy} = -\frac{ma^2}{4}}$$

0,5

d – Teorema da Resultante, e notando que o centro de massa G tem movimento circular variado, de raio $\frac{a}{2}$:

$$m\vec{a}_G = m\left(-\dot{\omega}\frac{a}{2}\vec{k} - \omega^2\frac{a}{2}\vec{i}\right) = \left(X_A + X_E\right)\vec{i} + Y_A\,\vec{j} + \left(Z_A + Z_E\right)\vec{k} \Rightarrow \begin{cases} X_A + X_E = -m\omega^2\dfrac{a}{2} & (1) \\ Y_A = 0 & (2) \\ Z_A + Z_E = -m\dot{\omega}\dfrac{a}{2} & (3) \end{cases}$$

0,5

Teorema da Quantidade de Movimento Angular: $\dot{\vec{H}}_D = m\vec{v}_G \wedge \vec{v}_D + \vec{M}_D^{ext}$

$$\vec{H}_D = \omega\left(-J_{Dxy}\,\vec{i} + J_{Dy}\,\vec{j}\right) \Rightarrow \dot{\vec{H}}_D = \dot{\omega}\left(-J_{Dxy}\,\vec{i} + J_{Dy}\,\vec{j}\right) + \omega^2 J_{Dxy}\vec{k}$$

$$\dot{\omega}\left(-J_{Dxy}\,\vec{i} + J_{Dy}\,\vec{j}\right) + \omega^2 J_{Dxy}\vec{k} = a\left(-Z_A + Z_E\right)\vec{i} + M\,\vec{j} + a\left(X_A - X_E\right)\vec{k} \Rightarrow \begin{cases} Z_A - Z_E = \dfrac{J_{Dxy}}{a}\dot{\omega} & (4) \\ \dot{\omega}J_{Dy} = M \Rightarrow \dot{\omega} = \dfrac{M}{J_{Dy}} & (5) \\ X_A - X_E = \dfrac{J_{Dxy}}{a}\omega^2 & (6) \end{cases}$$

0,5

Somando (1) e (6) obtém-se:

$$\boxed{X_A = \frac{\omega^2}{2a}\left(J_{Dxy} - \frac{ma^2}{2}\right) = -\frac{3\omega^2 ma}{8}}$$

$$\boxed{X_E = -\frac{\omega^2}{2a}\left(J_{Dxy} + \frac{ma^2}{2}\right) = -\frac{\omega^2 ma}{8}}$$

Usando (5) e somando (3) e (4) obtém-se:

$$\boxed{Z_A = \frac{M}{2J_{Dy}}\left(\frac{J_{Dxy}}{a} - \frac{ma}{2}\right) = -\frac{9M}{8a}}$$

$$\boxed{Z_E = -\frac{M}{2J_{Dy}}\left(\frac{J_{Dxy}}{a} + \frac{ma}{2}\right) = -\frac{3M}{8a}}$$

0,5

Diretamente de (2):

$$\boxed{Y_A = 0}$$