ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PME 3100 – MECÂNICA 1 – Terceira Prova – 26 de novembro de 2019 –
Duração da Prova: 120 minutos
(não é permitido portar celulares, tablets, calculadoras e dispositivos similares)

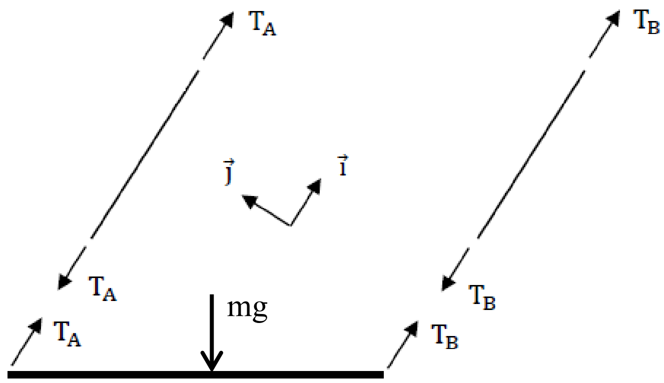
GABARITO

QUESTÃO 1 (3,5 pontos). Conforme ilustrado na figura, a barra horizontal AB de massa m e comprimento $2a$ é suspensa pelas barras bi-articuladas AC e BD, de comprimento a e massa desprezível. A barra AB é liberada do repouso na posição $\theta = 0$. Para uma posição θ qualquer, pede-se:

a) o diagrama de corpo livre da barra AB;
b) a velocidade angular $\dot{\theta}$ das barras AC e BD;
c) a aceleração angular $\ddot{\theta}$ das barras AC e BD;
d) as forças atuantes nas barras AC e BD.

Resolução:

a) **(0,5)**



b) Aplicando o TEC $(E - E_0 = W_{ext})$, vem:

$E = \frac{1}{2}m(\dot{\theta}\,a)^2$ **(0,5)**, $E_0 = 0$, $W_{ext} = mg(a\sin\theta)$ **(0,5)**

$\Rightarrow \frac{1}{2}m(\dot{\theta}\,a)^2 = mg(a\sin\theta) \Rightarrow \boxed{\dot{\theta}^{\,2} = \frac{2g\sin\theta}{a}}$

c) Derivando a expressão de ω^2, e lembrando que $\dot{\theta} = \omega$, resulta:

$2\dot{\theta}\,\ddot{\theta} = \frac{2g\cos\theta}{a}\dot{\theta} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\ddot{\theta} = \frac{g\cos\theta}{a}}$ **(0,5)**

d) O fato da massa das barras AC e BD ser desprezível acarreta a ausência de força transversal nessas barras (para comprovar basta aplicar o TQMA com polo em C ou D):

A aplicação do TQMA com polo em G $\left(\vec{M}_G^{ext} = I_{Gz}\,\dot{\vec{\Omega}}\right)$ para a barra horizontal leva a:

$(T_B\sin\theta)\,a\,\vec{k} - (T_A\sin\theta)\,a\,\vec{k} = \frac{m(2a)^2}{12}(0)\,\vec{k} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{T_A = T_B = T}$ **(0,5)**

Aplicando o TMB para a barra horizontal $\left(\vec{R}_{ext} = m\,\vec{a}_G\right)$, resulta:

$2T\,\vec{\imath} - mg\,(\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath}\,) = m\left(\dot{\theta}^{\,2}a\,\vec{\imath} - \ddot{\theta}\,a\,\vec{\jmath}\,\right)$ **(0,5)**

A equação vetorial acima produz duas equações escalares:

$2T - mg\sin\theta = m\,\dot{\theta}^{\,2}a \qquad (1)$

$-mg\cos\theta = -m\,\ddot{\theta}\,a \qquad (2)$

A equação (2) fornece:

$\ddot{\theta} = \frac{g\cos\theta}{a} \qquad$ (como antes)

A equação (1) permite determinar a força de tração nas barras de suspensão:

$T = \frac{m}{2}\left(\dot{\theta}^{\,2}a + g\sin\theta\,\right) \qquad \therefore \qquad \boxed{T = \frac{3}{2}\,mg\sin\theta}$ **(0,5)**

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PME 3100 – MECÂNICA 1 – Terceira Prova – 26 de novembro de 2019 –
Duração da Prova: 120 minutos
(não é permitido portar celulares, tablets, calculadoras e dispositivos similares)

GABARITO

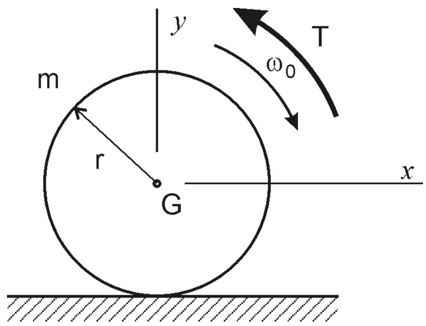
QUESTÃO 2 (3,5 pontos). O disco de raio r e massa m gira com velocidade angular ω_0 sobre o plano horizontal, sem escorregar. Num determinada instante, um torque de frenagem T constante é aplicado ao disco. O coeficiente de atrito entre o disco e o plano horizontal é μ, e a aceleração da gravidade é g. Pede-se:

a) o diagrama de corpo livre do disco;

b) determine o valor máximo de T para que disco não derrape;

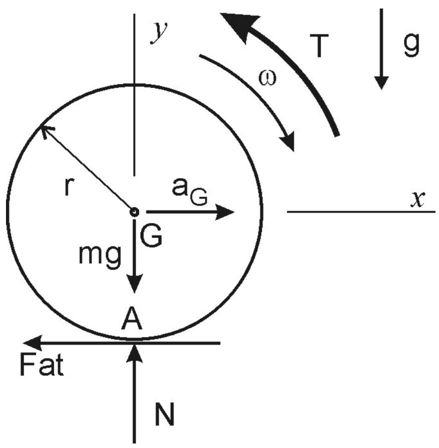
c) o intervalo de tempo até o disco parar completamente, sem escorregar, em função de T e ω_0.

Dado: $J_G = \frac{mr^2}{2}$



Resolução:

a) **(1,0)**



b)

TR: $ma_G\vec{i} = -F_{at}\vec{i} + (N - mg)\vec{j} \Rightarrow$ **(0,5)**

$$\Rightarrow \begin{cases} ma_G = -F_{at} & (1) \\ N = mg & (2) \end{cases}$$

TQMA: $\vec{H}_G = -\omega J_{G\omega}\vec{k} = -\omega\frac{mr^2}{2}\vec{k}$ $\quad (polo\ em\ G) \Rightarrow$ **(0,5)**

$$\Rightarrow \dot{\vec{H}}_G = -\dot{\omega}\frac{mr^2}{2}\vec{k} = \vec{M}_G^{ext} = (-F_{at}r + T)\vec{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{mr^2}{2}\dot{\omega} = F_{at}r - T \qquad (3)$$

Cinemática:

$$\vec{v}_G = v_G\vec{i} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (G - A) = 0\vec{i} - \omega\vec{k} \wedge r\vec{j} = \omega r\vec{i} \Rightarrow a_G = \dot{\omega}r \qquad (4)$$

(0,5)

Substituindo (4) em (1):

$$m\dot{\omega}r = -F_{at} \qquad (5)$$

De (5) e (3):

$$\frac{3r}{2}F_{at} = T \qquad (6)$$

Para não derrapar, com (2) e (6):

$$F_{at} \leq \mu N \Rightarrow \frac{2T}{3r} \leq \mu mg \Rightarrow \quad \boldsymbol{T \leq \frac{3\mu mgr}{2}}$$ **(0,5)**

c) De (1), (3) e (4):

$$\dot{\omega} = -\frac{2T}{3mr^2} = cte \Rightarrow \omega = \omega_0 - \frac{2T}{3mr^2}t \qquad (7)$$

Até parar, de (7):

$$\omega = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\Delta t = \frac{3mr^2\omega_0}{2T}}$$ **(0,5)**

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

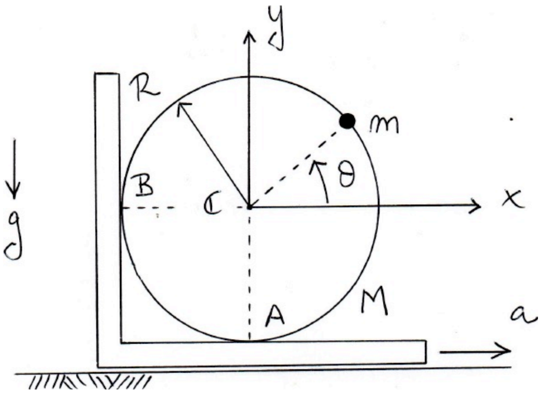
PME 3100 – MECÂNICA 1 – Terceira Prova – 26 de novembro de 2019 –

Duração da Prova: 120 minutos

(não é permitido portar celulares, tablets, calculadoras e dispositivos similares)

GABARITO

QUESTÃO 3 (3,0 pontos). A figura mostra um disco homogêneo de massa M e raio R, em cuja periferia foi soldada uma pequena esfera de massa m. O disco é apoiado em uma base que se desloca, sobre o plano horizontal, com aceleração a. Despreze o atrito nos pontos de contato A e B, entre o disco e a base. Adote o sistema de coordenadas (C, x, y, z), que apenas translada com o disco (o eixo Cx é paralelo ao plano horizontal e o plano xy é o plano médio do disco). Determine:



a) o diagrama de corpo livre do sistema disco + esfera;

b) o vetor posição $(G - C)$ do baricentro G do sistema;

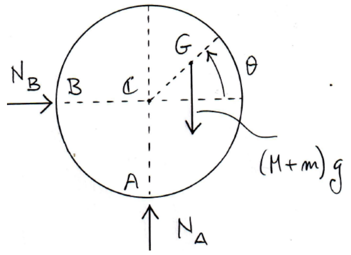
c) o momento de inércia I_{Cz} e o produto de inércia I_{Cxy} do sistema;

d) a aceleração angular $\ddot{\theta}$ do sistema, em função de θ e dos demais dados.

Dado: $I_C = \frac{MR^2}{2}$ momento de inércia do disco com relação ao eixo z.

Resolução:

a) **(0,5)**



b)

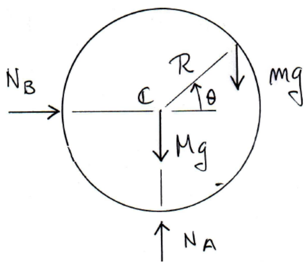
$$(G - C) = \frac{mR(\cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath})}{M+m} \qquad \textbf{(0,5)}$$

c)

$$I_{Cz} = \frac{MR^2}{2} + mR^2 \qquad \textbf{(0,5)}$$

$$I_{Cxy} = m(R\cos\theta)(R\sin\theta)$$

d) Aplicação do TQMA com polo em C (acelerado):



$$\vec{M}_C^{ext} = (M+m)(G - C) \wedge \vec{a}_C + I_{Cz}\,\vec{\alpha} \qquad \textbf{(0,5)}$$

$$\Rightarrow \quad -mg\,R\cos\theta\,\vec{k} = mR\,(\cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath}) \wedge a\,\vec{\imath} + \left(\frac{MR^2}{2} + mR^2\right)\ddot{\theta}\vec{k} \qquad \textbf{(0,5)}$$

$$\Rightarrow \quad -mg\,R\cos\theta\,\vec{k} = -mRa\sin\theta\,\vec{k} + R^2\left(\frac{M}{2} + m\right)\ddot{\theta}\vec{k}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\ddot{\theta} = \frac{2m(a\sin\theta - g\cos\theta)}{R(M+2m)}} \textbf{(0,5)}$$