ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

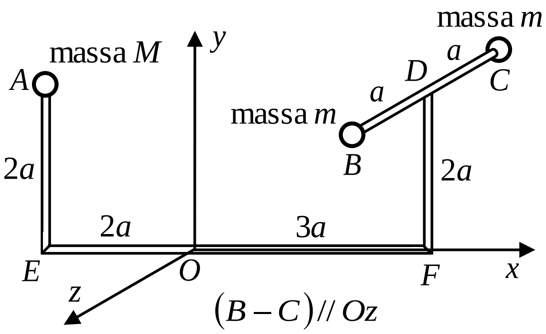
Departamento de Engenharia Mecânica

Mecânica I PME 3100 Prova nº 3 Data 27 / 11 / 2018

Duração da Prova: 120 minutos

Não é permitido o porte de calculadoras, "tablets", celulares e dispositivos similares.

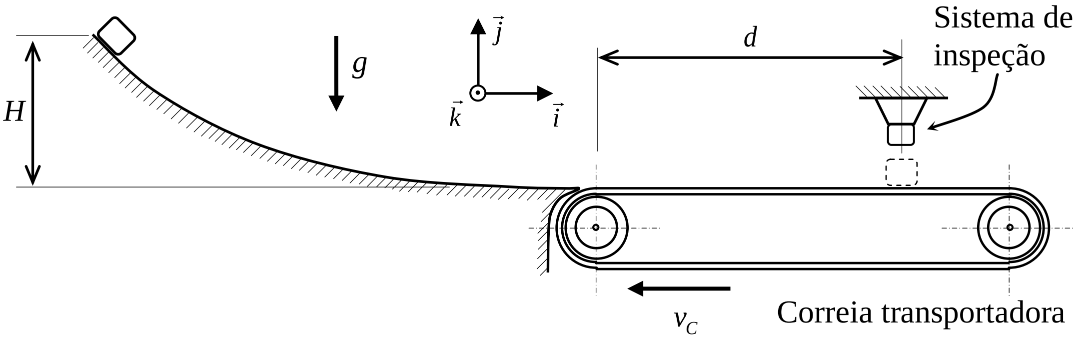
QUESTÃO 1 (3,0 pontos) – O sistema material da figura é composto pelas partículas B e C, cada uma de massa m, e pela partícula A, de massa M. As barras AE, BC, DF e EF tem massa desprezível. Determine:



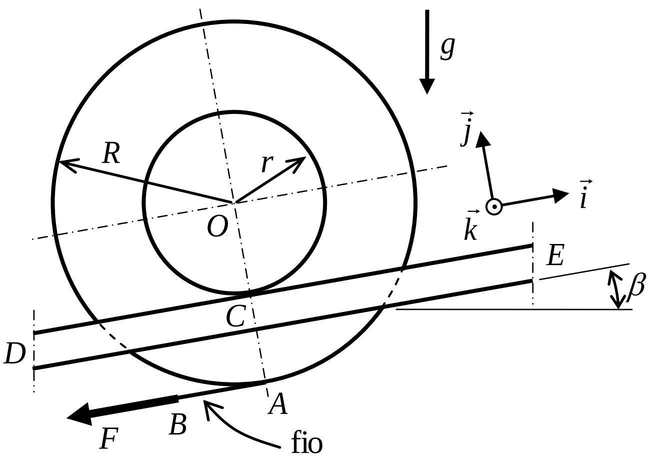
a) o momento de inércia J_{Oz}, em função de M, m e das dimensões do sistema;

b) o valor de M, em função de m, para que os produtos de inércia sejam todos nulos.

QUESTÃO 2 (3,5 pontos) – Para alimentar um sistema de inspeção de peso de caixas de alimentos, uma caixa retangular de massa m (modelada como ponto material), partindo do repouso, desce por uma superfície sem atrito até atingir uma correia transportadora que se move com velocidade horizontal v_C. Nessa correia, o coeficiente de atrito entre a caixa e a superfície é μ, e a caixa escorrega em relação a esta superfície. A caixa deve passar sob o sistema de inspeção com a mesma velocidade da correia a uma distância d do ponto onde entrou na correia. Usando o Teorema da Energia Cinética, determine qual é essa distância d.

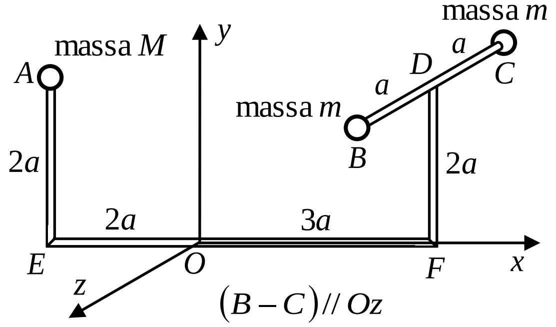


QUESTÃO 3 (3,5 pontos) – Um carretel de massa M é formado por dois cilindros, de raios R e r, soldados um ao outro, e tem um fio ideal enrolado na circunferência do cilindro (O,R). Esse carretel é colocado sobre um trilho fixo e inclinado DE, num plano vertical, e uma força F paralela ao trilho é aplicada na ponta B do fio, conforme mostrado na figura ao lado. Suponha que não há escorregamento entre o carretel e o trilho. É dado o momento de inércia J_{Oz} do carretel, em relação ao seu centro de massa O. Usando o sistema de coordenadas indicado na figura, e em função dos dados, pede-se:



a) o diagrama de corpo livre do carretel;
b) a relação entre a aceleração do ponto O e a aceleração angular do carretel;
c) a expressão da força de atrito no contato em C, em função da força F;
d) supondo β pequeno, o valor mínimo da força F para que o carretel suba pelo trilho.

QUESTÃO 1 (3,0 pontos) – O sistema material da figura é composto pelas partículas B e C, cada uma de massa m, e pela partícula A, de massa M. As barras AE, BC, DF e EF tem massa desprezível. Determine:



a) o momento de inércia J_{Oz}, em função de M, m e das dimensões do sistema;

b) o valor de M, em função de m, para que os produtos de inércia sejam todos nulos.

Solução

a – Momento de inércia J_{Oz}:

$$J_{Oz} = M\left[(2a)^2+(2a)^2\right]+2m\left[(2a)^2+(3a)^2\right] = M\left(8a^2\right)+2m\left(13a^2\right) \Rightarrow \boxed{J_{Oz}=(8M+26m)a^2} \quad \boxed{\mathbf{1{,}0}}$$

b – Cálculo dos produtos de inércia:

$$J_{Oxz} = m(3a)(a)+m(3a)(-a)+M(-2a)(0) \Rightarrow J_{Oxz}=0$$

$$J_{Oyz} = m(2a)(a)+m(2a)(-a)+M(2a)(0) \Rightarrow J_{Oyz}=0$$

$$\boxed{\mathbf{0{,}5}}$$

$$J_{Oxy} = 2m(2a)(3a)+M(-2a)(2a)=12ma^2-4Ma^2 \Rightarrow J_{Oxy}=4(3m-M)a^2 \quad \boxed{\mathbf{1{,}0}}$$

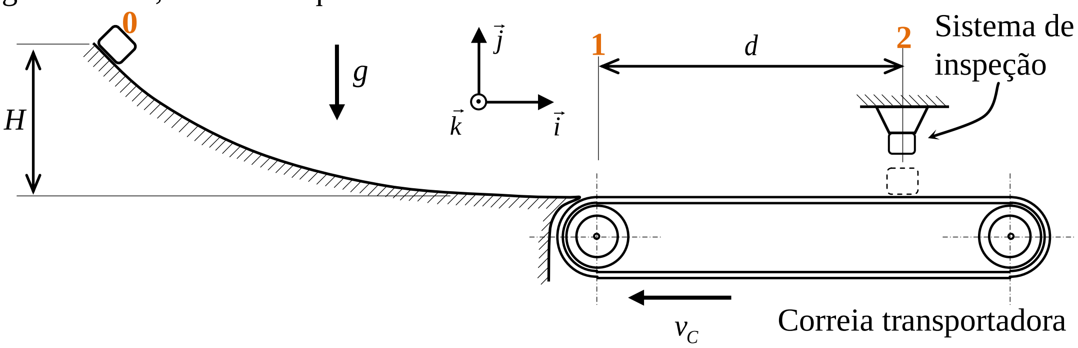
Basta anular o produto de inércia J_{Oxy}:

$$J_{Oxy}=(3m-M)4a^2=0 \Rightarrow \boxed{M=3m} \quad \boxed{\mathbf{0{,}5}}$$

Observações:

- Como o plano Oxy é de simetria, pode-se concluir imediatamente que $J_{Oxz}=J_{Oyz}=0$, e que o eixo Oz é principal de inércia.
- Impondo $J_{Oxy}=0$, temos que os eixos Ox e Oy também são principais de inércia.

QUESTÃO 2 (3,5 pontos) – Para alimentar um sistema de inspeção de peso de caixas de alimentos, uma caixa retangular de massa m (modelada como ponto material), partindo do repouso, desce por uma superfície sem atrito até atingir uma correia transportadora que se move com velocidade horizontal v_C. Nessa correia, o coeficiente de atrito entre a caixa e a superfície é μ, e a caixa escorrega em relação a esta superfície. A caixa deve passar sob o sistema de inspeção com a mesma velocidade da correia a uma distância d do ponto onde entrou na correia. Usando o Teorema da Energia Cinética, determine qual é essa distância d.



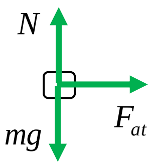
Solução

Na parte onde não há atrito, apenas a força peso realiza trabalho. Usando o Teorema da Energia Cinética:

$$E_1 - E_0 = W_{0\to 1} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 = mgH \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gH}$$ **0,5**

Na correia transportadora, até a posição do sistema de inspeção:

Diagrama de corpo livre da caixa



Teorema da resultante

$$ma_x = \begin{cases} -F_{at} & \text{se } v_1 > v_C \\ +F_{at} & \text{se } v_1 < v_C \end{cases}$$

$$ma_y = N - mg = 0 \Rightarrow N = mg$$

1,0

Nesse trecho, até a posição do sistema de inspeção, como há escorregamento, e a posição vertical é constante, apenas a força de atrito realiza trabalho.

$|F_{at}| = |\mu N| = \mu mg$ (constante, pois há escorregamento)

$W_{1\to 2} = F_{at} d = \pm \mu mgd$ **0,5**

Teorema da energia cinética

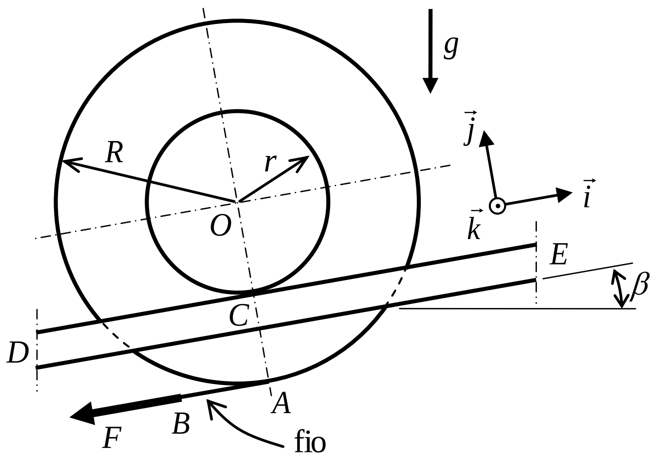
$$E_2 - E_1 = W_{1\to 2} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \pm\mu mgd \Rightarrow \frac{1}{2}mv_2^2 - mgH = \pm\mu mgd$$

Como queremos $v_2 = v_C$: $\frac{1}{2}mv_C^2 - mgH = \pm\mu mgd \Rightarrow$ $\boxed{d = \left|\dfrac{\frac{1}{2}v_C^2 - gH}{\mu g}\right|}$

0,5 (uma das respostas)

1,0 (a segunda resposta)

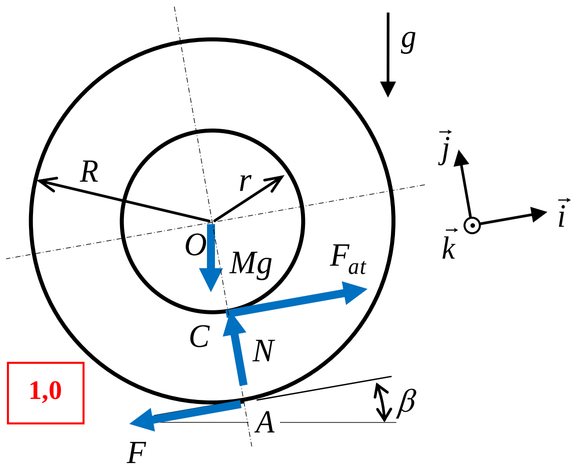
QUESTÃO 3 (3,5 pontos) – Um carretel de massa M é formado por dois cilindros, de raios R e r, soldados um ao outro, e tem um fio ideal enrolado na circunferência do cilindro (O,R). Esse carretel é colocado sobre um trilho fixo e inclinado DE, num plano vertical, e uma força F paralela ao trilho é aplicada na ponta B do fio, conforme mostrado na figura ao lado. Suponha que não há escorregamento entre o carretel e o trilho. É dado o momento de inércia J_{Oz} do carretel, em relação ao seu centro de massa O. Usando o sistema de coordenadas indicado na figura, e em função dos dados, pede-se:



a) o diagrama de corpo livre do carretel;
b) a relação entre a aceleração do ponto O e a aceleração angular do carretel;
c) a expressão da força de atrito no contato em C, em função da força F;
d) supondo β pequeno, o valor mínimo da força F para que o carretel suba pelo trilho.

Solução

a) Diagrama de corpo livre:



1,0

b) Não havendo escorregamento:

$$\vec{v}_O = \vec{v}_C + \vec{\omega} \wedge (O - C) \Rightarrow v_O \vec{i} = \vec{0} + \omega \vec{k} \wedge r\,\vec{j}$$

$$v_O\,\vec{i} = -\omega r\,\vec{i} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{a}_O = -\dot{\omega} r\,\vec{i}} \qquad (1)$$ **0,5**

c) Teorema da Resultante

$$M\,\vec{a}_O = (F_{at} - F - Mg\,\text{sen}\beta)\vec{i} + (N - Mg\cos\beta)\vec{j}$$

Usando (1):

$$-M\,\dot{\omega} r = F_{at} - F - Mg\,\text{sen}\beta \qquad (2)$$

$$0 = N - Mg\cos\beta \Rightarrow N = Mg\cos\beta \qquad (3)$$

0,5

Teorema da Quantidade de Movimento Angular

$$\dot{\vec{H}}_O = \vec{M}_O$$

$$\vec{H}_O = J_{Oz}\,\omega\,\vec{k} \Rightarrow \dot{\vec{H}}_O = J_{Oz}\,\dot{\omega}\,\vec{k}$$

$$\vec{M}_O = (F_{at} r - FR)\vec{k}$$

$$J_{Oz}\dot{\omega} = F_{at} r - FR \qquad (4)$$

0,5

De (2) e (4):

$$\dot{\omega} = \frac{Mg\,r\,\text{sen}\beta - F(R - r)}{J_{Oz} + M\,r^2} \qquad (5)$$

$$\boxed{F_{at} = \frac{(J_{Oz} + MrR)F + J_{Oz}Mg\,\text{sen}\beta}{J_{Oz} + M\,r^2}} \qquad (6)$$

0,5

d) Para o carretel subir pelo trilho: $\dot{\omega} < 0$. Assim, de (5):

$$\boxed{F > \left(\frac{r}{R - r}\right) Mg\,\text{sen}\beta}$$ **0,5**

Observações:

- Para que a hipótese de não haver escorregamento seja válida, temos também um limite superior para a força F:

Para não escorregar: $F_{at} \leq \mu N \underset{\text{usando(3) e (6)}}{\Rightarrow} \dfrac{(J_{Oz} + MrR)F + J_{Oz} Mg\,\text{sen}\beta}{J_{Oz} + M\,r^2} \leq \mu\, Mg \cos\beta$

$$F \leq \frac{Mg\left[\left(J_{Oz} + m\,r^2\right)\mu \cos\beta - J_{Oz}\text{sen}\beta\right]}{J_{Oz} + MrR}$$

- Para que haja F que satisfaça os limites mínimo e máximo:

$$\frac{Mg\,r\,\text{sen}\beta}{R - r} \leq F \leq \frac{Mg\left[\left(J_{Oz} + M\,r^2\right)\mu \cos\beta - J_{Oz}\text{sen}\beta\right]}{J_{Oz} + MrR}$$

$$\frac{r\,\text{sen}\beta}{R - r} \leq \frac{\left[\left(J_{Oz} + M\,r^2\right)\mu \cos\beta - J_{Oz}\text{sen}\beta\right]}{J_{Oz} + MrR} \quad \Rightarrow \quad \tan\beta \leq \mu \frac{(R - r)}{R}$$