ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

Mecânica I   PME 3100   Prova nº 3   Data 05 / 12 / 2017

Duração da Prova: 2 horas

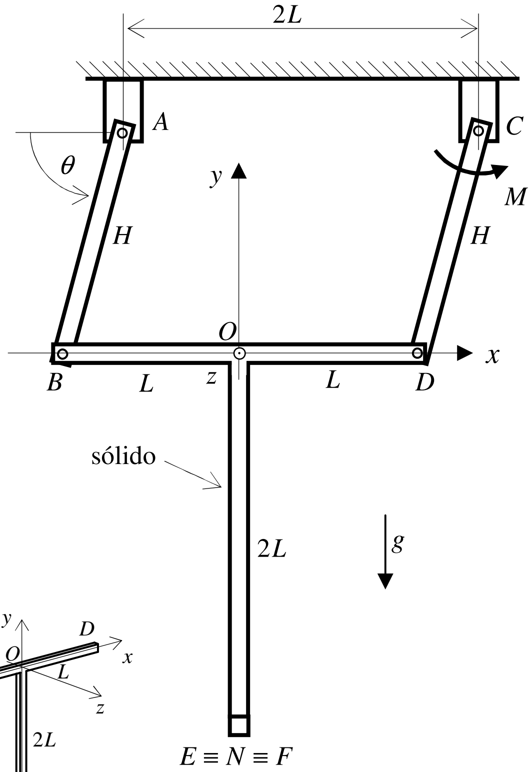
- **Não é permitido o uso de calculadoras, "tablets", celulares e dispositivos similares.**
- **Após o início da distribuição do enunciado da prova, é proibido sair da sala antes das 08:30.**
- **A partir do momento em que a prova for encerrada, não é permitido ao aluno continuar escrevendo na folha de respostas, havendo possibilidade de anulação da respectiva prova se isto ocorrer.**

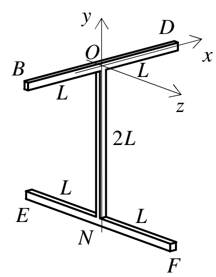
Questão 1 (3,5 pontos): Um sólido de massa total m é formado pela junção das barras BD, ON e EF, homogêneas, idênticas, perpendiculares entre si, de comprimento $2L$ e dimensões transversais desprezíveis, conforme mostra a figura. As barras AB e CD são ambas de comprimento H e massas desprezíveis. Considere movimento plano em planos paralelos a Oxy, devido a pinos com eixos na direção de Oz em A, B, C e D (conexões sem atrito). No instante inicial, na posição $\theta = 0^\circ$, o sistema é abandonado do repouso, sujeito ao próprio peso e à aplicação simultânea de um momento M que se mantém constante.

a – Determine o momento de inércia J_{Oz} e o produto de inércia J_{Oxz} do sólido.

b – Expresse a energia cinética do sistema em função de $\dot{\theta}$ e o trabalho das forças que atuam no sistema em função de θ.

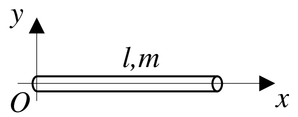
c – Expresse a velocidade angular $\dot{\theta}$ em função de θ e a equação de movimento do sistema (a expressão de $\ddot{\theta}$).





Vista em perspectiva do sólido

Dado:



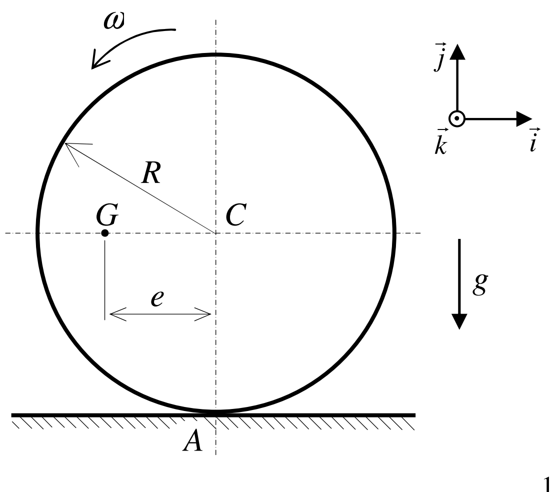
$$J_{Oy} = \frac{ml^2}{3}$$

Questão 2 (3,0 pontos): No instante mostrado na figura, o disco **não homogêneo**, de massa m e momento de inércia J_G, rola sem escorregar sobre o plano horizontal, com uma velocidade angular ω. Para esse instante pede-se:

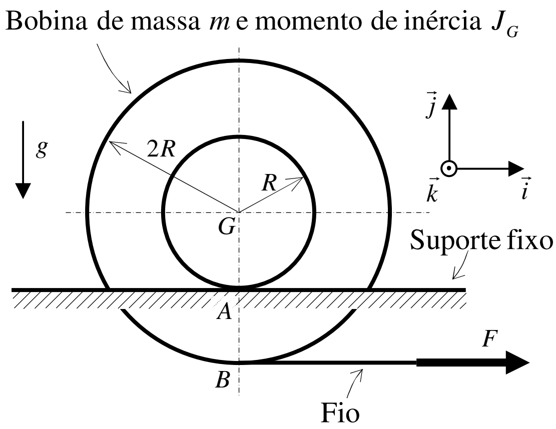
a – o diagrama de corpo livre do disco.

b – o vetor aceleração angular $\vec{\alpha}$ do disco.

c – a aceleração $\vec{a}_G$ do centro de massa G, bem como as reações do plano sobre o disco.



Questão 3 (3,5 pontos): Considere uma bobina com um fio ideal enrolado conforme mostra a figura. O raio de enrolamento é $2R$ e o raio de rolamento é R. Não há escorregamento entre a bobina e o suporte fixo, e nem entre a bobina e o fio. No instante inicial o sistema está em repouso e é aplicada no fio uma força $\vec{F} = F\vec{i}$, com $F > 0$, conhecida. Para esse instante:



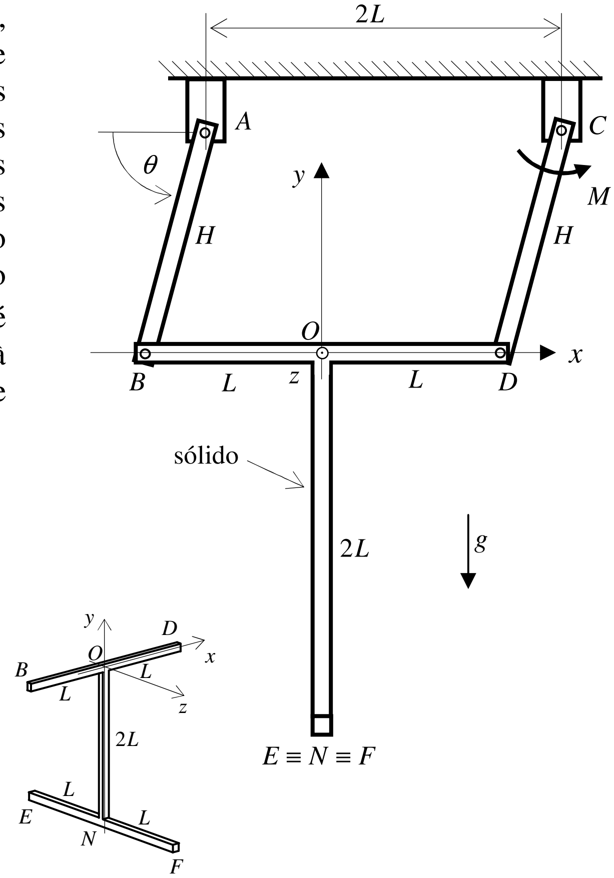
a – Desenhe o diagrama de corpo livre da bobina.

b – Determine a aceleração $\vec{a}_G$ do centro de massa da bobina em função de F e dos parâmetros do sistema.

c – Em função da resposta do item anterior, o fio irá enrolar ou desenrolar?

d – Determine o máximo valor de F tal que não haja escorregamento, considerando que o coeficiente de atrito entre a bobina e o suporte fixo é μ.

Questão 1 (3,5 pontos): Um sólido de massa total m é formado pela junção das barras BD, ON e EF, homogêneas, idênticas, perpendiculares entre si, de comprimento $2L$ e dimensões transversais desprezíveis, conforme mostra a figura. As barras AB e CD são ambas de comprimento H e massas desprezíveis. Considere movimento plano em planos paralelos a Oxy, devido a pinos com eixos na direção de Oz em A, B, C e D (conexões sem atrito). No instante inicial, na posição $\theta = 0^{\circ}$, o sistema é abandonado do repouso, sujeito ao próprio peso e à aplicação simultânea de um momento M que se mantém constante.



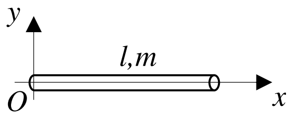
Vista em perspectiva do sólido

a – Determine o momento de inércia J_{Oz} e o produto de inércia J_{Oxz} do sólido.

b – Expresse a energia cinética do sistema em função de $\dot{\theta}$ e o trabalho das forças que atuam no sistema em função de θ.

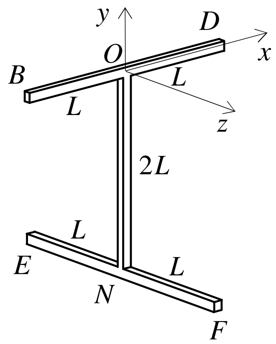
c – Expresse a velocidade angular $\dot{\theta}$ em função de θ e a equação de movimento do sistema (a expressão de $\ddot{\theta}$).

Dado:



$$J_{Oy} = \frac{ml^2}{3}$$

Solução



a) Dado que as dimensões transversais são desprezíveis, observa-se que todos os pontos do sólido têm ou coordenada x nula, ou coordenada z nula, portanto:

$$J_{Oxz} = \int xzdm \quad \Rightarrow \quad \boxed{J_{Oxz} = 0} \qquad \mathbf{0{,}5}$$

Usando o teorema dos eixos paralelos para uma barra genérica de massa m e comprimento l:

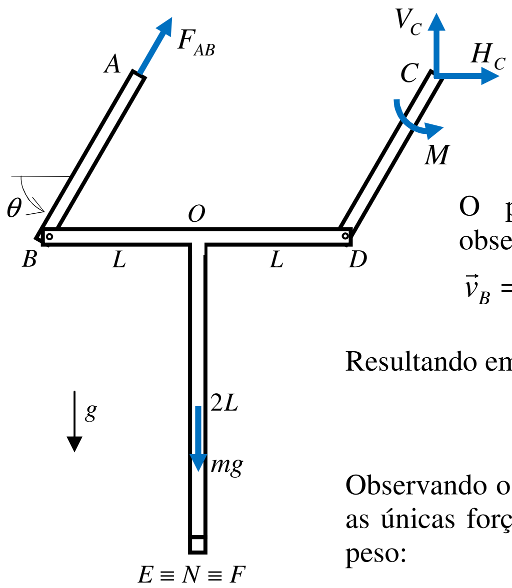
$$J_A = J_G + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{ml^2}{3} = J_G + \frac{ml^2}{4} \Rightarrow J_G = \frac{ml^2}{3} - \frac{ml^2}{4} \quad \Rightarrow J_G = \frac{ml^2}{12}$$

Aplicando para a barra BD: $J_{OzBD} = \left(\frac{m}{3}\right)\frac{(2L)^2}{12} = \frac{mL^2}{9}$

Notando que todos os pontos da barra EF estão a uma distância $2L$ do eixo O_z : $J_{OzEF} = \frac{m}{3}(2L)^2 = \frac{m4L^2}{3}$

Portanto: $J_{Oz} = \underbrace{\frac{mL^2}{9}}_{\text{barra } BD} + \underbrace{\frac{m}{3}\frac{(2L)^2}{3}}_{\text{barra } ON} + \underbrace{\frac{m4L^2}{3}}_{\text{barra } EF} \quad \Rightarrow \quad \boxed{J_{Oz} = \frac{17}{9}mL^2} \qquad \mathbf{0{,}5}$

b) Diagrama de corpo livre:



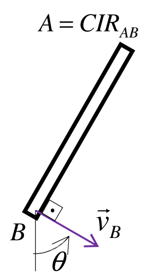
Observando o paralelogramo $ABCD$, conclui-se que o vetor de rotação do sólido é nulo. Neste caso, o sólido está em translação curvilínea e todos os seus pontos têm a mesma velocidade e aceleração. Portanto: $\vec{v}_G = \vec{v}_B$ e a energia cinética é:

$$E = \frac{m|\vec{v}_B|^2}{2} \qquad \mathbf{0{,}5}$$

O ponto B pertence à barra AB, portanto, observando a figura à direita:

$$\vec{v}_B = \dot{\theta}H\left(\operatorname{sen}\theta\,\vec{i} - \cos\theta\,\vec{j}\right) \quad \Rightarrow \quad |\vec{v}_B|^2 = \dot{\theta}^2 H^2$$

Resultando em: $\boxed{E = \frac{mH^2}{2}\dot{\theta}^2}$ $\quad \mathbf{0{,}5}$



Cinemática da barra AB

Observando o diagrama de corpo livre, uma vez que os pontos A e C são fixos, as únicas forças que realizam trabalho são o binário de momento M e a força peso:

$$\boxed{W = mgH\operatorname{sen}\theta + M\theta} \qquad \mathbf{0{,}5}$$

c) Teorema da energia cinética para o sólido (parte do repouso):

$$E - E_i = W \quad \Rightarrow \quad \frac{mH^2}{2}\dot{\theta}^2 - 0 = mgH\operatorname{sen}\theta + M\theta \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta}^2 = \frac{2g\operatorname{sen}\theta}{H} + \frac{2M}{mH^2}\theta \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g\operatorname{sen}\theta}{H} + \frac{2M}{mH^2}\theta}} \qquad \mathbf{0{,}5}$$

Derivando no tempo a expressão de $\dot{\theta}^2$ obtemos a equação de movimento do sistema:

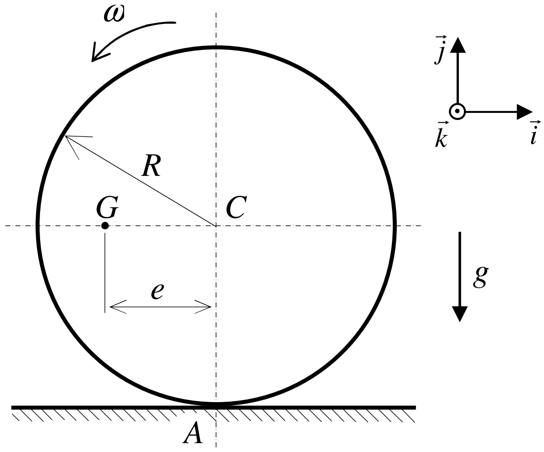
$$2\dot{\theta}\ddot{\theta} = \left(\frac{2g}{H}\cos\theta + \frac{2M}{mH^2}\right)\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{\theta} = \frac{g}{H}\cos\theta + \frac{M}{mH^2}} \qquad \mathbf{0{,}5}$$

Questão 2 (3,0 pontos): No instante mostrado na figura, o disco **não homogêneo**, de massa m e momento de inércia J_G, rola sem escorregar sobre o plano horizontal, com uma velocidade angular ω. Para esse instante pede-se:

a – o diagrama de corpo livre do disco.

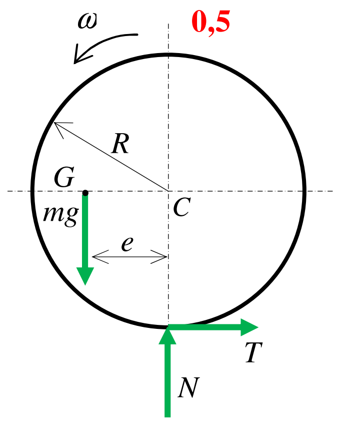
b – o vetor aceleração angular $\vec{\alpha}$ do disco.

c – a aceleração $\vec{a}_G$ do centro de massa G, bem como as reações do plano sobre o disco.



Solução

a) Diagrama de corpo livre



b) Teorema da quantidade de movimento angular (polo em G):

$$J_{Gz}\alpha = TR + Ne \qquad (1)$$ **0,5**

Teorema da resultante:

$$ma_{Gx} = T \qquad (2)$$

$$ma_{Gy} = N - mg \qquad (3)$$ **0,5**

Relações cinemáticas:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_C + \vec{\alpha}\wedge(G-C) + \vec{\omega}\wedge[\vec{\omega}\wedge(G-C)]$$

$$\vec{a}_G = -\alpha R\vec{i} + \alpha\vec{k}\wedge(-e\vec{i}) + \omega\vec{k}\wedge[\omega\vec{k}\wedge(-e\vec{i})] = -\alpha R\vec{i} - \alpha e\vec{j} + \omega^2 e\vec{i}$$ **0,5**

Portanto:

$$a_{Gx} = \omega^2 e - \alpha R \qquad (4)$$

$$a_{Gy} = -\alpha e \qquad (5)$$

Usando (4) em (2) e (5) em (3), obtemos:

$$m(\omega^2 e - \alpha R) = T \qquad (6)$$

$$m(-\alpha e) = N - mg \quad \Rightarrow \quad N = m(g - \alpha e) \qquad (7)$$

c) Usando (6) e (7) em (1):

$$J_G\alpha = m(\omega^2 e - \alpha R)R + m(g - \alpha e)e \quad \Rightarrow \quad (J_G + mR^2 + me^2)\alpha = m(\omega^2 R + g)e$$

0,5 $$\boxed{\vec{\alpha} = \frac{m(\omega^2 R + g)e}{J_G + mR^2 + me^2}\vec{k}} \qquad (8)$$

c) Usando (8) em (4) e (5):

$$a_{Gx} = \omega^2 e - \frac{m(\omega^2 R + g)e}{J_G + mR^2 + me^2}R \Rightarrow a_{Gx} = \frac{\omega^2 e(me^2 + J_G) - mgeR}{J_G + mR^2 + me^2} \qquad (9)$$

$$a_{Gy} = -\frac{m(\omega^2 R + g)e^2}{J_G + mR^2 + me^2} \qquad (10)$$

$$\boxed{\vec{a}_G = \frac{\omega^2 e(me^2 + J_G) - mgeR}{J_G + mR^2 + me^2}\vec{i} - \frac{m(\omega^2 R + g)e^2}{J_G + mR^2 + me^2}\vec{j}}$$

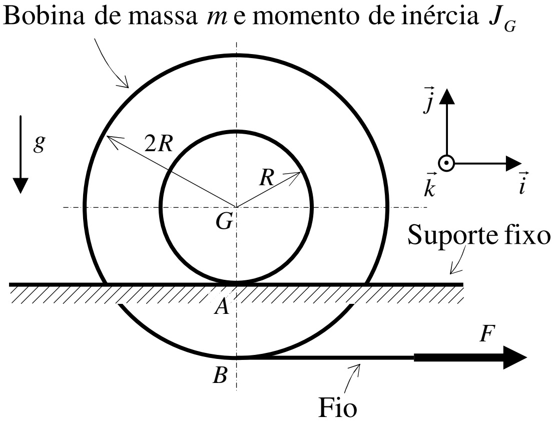
Usando (9) e (10) em (2) e (3):

$$T = ma_{Gx} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = m\left[\frac{\omega^2 e(me^2 + J_G) - mgeR}{J_G + mR^2 + me^2}\right]}$$

$$N = m(g + a_{Gy}) \quad \Rightarrow \quad N = m\left[g - \frac{m(\omega^2 R + g)e^2}{J_G + mR^2 + me^2}\right] \quad \Rightarrow \quad \boxed{N = m\left[\frac{(J_G + mR^2)g - mR\omega^2 e^2}{J_G + mR^2 + me^2}\right]}$$

0,5

Questão 3 (3,5 pontos): Considere uma bobina com um fio ideal enrolado conforme mostra a figura. O raio de enrolamento é $2R$ e o raio de rolamento é R. Não há escorregamento entre a bobina e o suporte fixo, e nem entre a bobina e o fio. No instante inicial o sistema está em repouso e é aplicada no fio uma força $\vec{F} = F\vec{i}$, com $F > 0$, conhecida. Para esse instante:



a – Desenhe o diagrama de corpo livre da bobina.

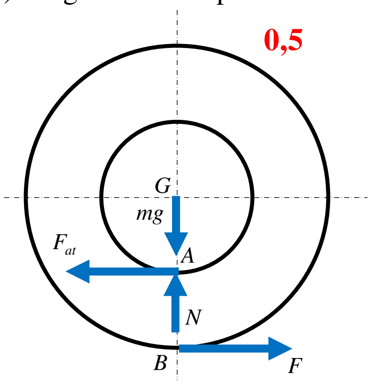
b – Determine a aceleração $\vec{a}_G$ do centro de massa da bobina em função de F e dos parâmetros do sistema.

c – Em função da resposta do item anterior, o fio irá enrolar ou desenrolar?

d – Determine o máximo valor de F tal que não haja escorregamento, considerando que o coeficiente de atrito entre a bobina e o suporte fixo é μ.

Solução

a) Diagrama de corpo livre



b) Teorema da resultante:

$$ma_{Gx} = \sum F_x \Rightarrow ma_{Gx} = F - F_{at}$$

$$ma_{Gy} = \sum F_y \Rightarrow m0 = N - mg \Rightarrow N = mg$$

0,5

Teorema da quantidade de movimento angular:

$$J_G\dot{\omega} = M_{Gz} \Rightarrow J_G\dot{\omega} = F2R - F_{at}R$$ **0,5**

Cinemática (rola sem escorregar):

$$a_{Gx} = -\dot{\omega}R$$ **0,5**

Portanto:

$$J_G\left(-\frac{a_{Gx}}{R}\right) = F2R - F_{at}R \Rightarrow \frac{J_G}{R^2}a_{Gx} = -2F + F_{at}$$

Comparando com: $ma_{Gx} = F - F_{at}$

Resulta em: $\left(m + \frac{J_G}{R^2}\right)a_{Gx} = -F \Rightarrow \boxed{\vec{a}_G = -\frac{R^2F}{mR^2 + J_G}\vec{i}}$ **0,5**

c) Como consequência: $\dot{\vec{\omega}} = \frac{RF}{\left(J_G + mR^2\right)}\vec{k}$, ou seja, como o sistema parte do repouso e o vetor aceleração angular é no sentido positivo de $\vec{k}$, a bobina irá girar no sentido anti-horário, e **o cabo irá desenrolar**. **0,5**

d) Usando a equação:

$$ma_{Gx} = F - F_{at} \Rightarrow F_{at} = F - m\left(-\frac{R^2F}{J_G + mR^2}\right) \Rightarrow F_{at} = \left(1 + \frac{mR^2}{J_G + mR^2}\right)F \quad \Rightarrow \quad F_{at} = \left(\frac{J_G + 2mR^2}{J_G + mR^2}\right)F$$

No limite do escorregamento temos que $F_{at} = \mu N$:

$$\mu N = \left(\frac{J_G + 2mR^2}{J_G + mR^2}\right)F_{max} \Rightarrow \mu mg = \left(\frac{J_G + 2mR^2}{J_G + mR^2}\right)F_{max} \Rightarrow \boxed{F_{max} = \left(\frac{J_G + mR^2}{J_G + 2mR^2}\right)\mu mg}$$ **0,5**