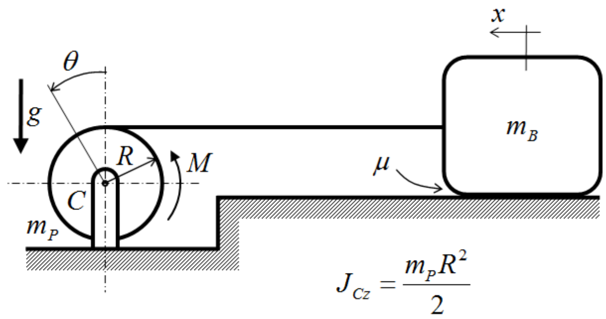
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia Mecânica

Mecânica I   PME 3100   Prova nº 3   Data 29 / 11 / 2016

Duração da Prova: 110 minutos

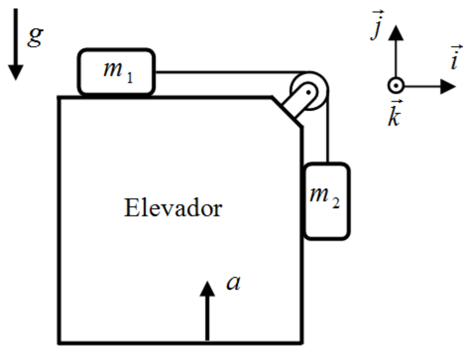
- **Não é permitido o porte de calculadoras, "tablets", celulares e dispositivos similares.**
- **Após o início da distribuição do enunciado da prova, é proibido sair da sala antes das 08:30.**
- **A partir do momento em que a prova for encerrada, não é permitido ao aluno continuar escrevendo na folha de respostas, havendo possibilidade de anulação da respectiva prova se isto ocorrer.**

(3,5 pontos) Questão 1 - Um bloco de massa m_B escorrega sobre o plano horizontal com coeficiente de atrito μ. O bloco está ligado a um cabo ideal cuja extremidade está presa na polia de massa m_P e raio R, cujo centro C é vinculado ao solo por meio de articulação sem atrito. No instante inicial, quando o sistema está em repouso, é aplicado um momento de binário M (constante) na polia de centro C, suficiente para acelerar o bloco.
Sabe-se que a origem de x é tal que $x=0$ para $\theta=0$.

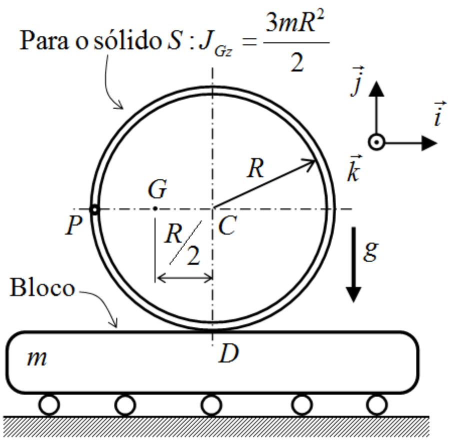


a) Determine a energia cinética do sistema em função da velocidade angular $\omega=\dot{\theta}$ da polia de centro C.
b) Determine velocidade angular ω da polia de centro C em função de θ.

(3,0 pontos) Questão 2 - Os blocos de massa m_1 e m_2 estão ligados por um cabo ideal, em um elevador cuja aceleração é $\vec{a}=a\vec{j}$, conhecida. A polia tem massa desprezível, e não há atrito na articulação. Também não há atrito entre os blocos e as superfícies com as quais estão em contato.



a) Desenhe os diagramas de corpo livre de cada bloco.
b) Calcule a tração T no cabo.



(3,5 pontos) Questão 3 - O sólido S, de centro de massa G e massa $2m$, é formado por um anel homogêneo de centro C e raio R, e um ponto material P, soldado na periferia do anel, conforme mostra a figura. O sólido S pode rolar sem escorregar sobre o bloco de massa m, que, por sua vez, se move sem atrito sobre o solo. O sistema é abandonado a partir do repouso na posição inicial mostrada na figura. No instante inicial, e considerando o bloco como referencial móvel:

a) Mostre que a aceleração relativa de G é $\vec{a}_{G,rel}=-\alpha R\vec{i}-\frac{\alpha R}{2}\vec{j}$, onde α é a aceleração angular do sólido S. Justifique porque a aceleração de arrastamento de G é $\vec{a}_{G,arr}=a_B\vec{i}$, onde $a_B\vec{i}$ é a aceleração do bloco. Explique porque a aceleração complementar de G é nula.

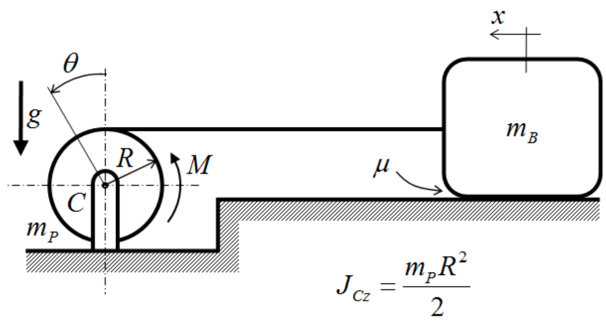
b) Desenhe os diagramas de corpo livre do sólido S e do bloco, separadamente.

c) Aplicando o teorema da resultante no sólido S e no bloco, separadamente, determine a força de atrito F_{at} e a normal N no ponto de contato D, em função da aceleração angular α do sólido S.

d) Calcule o vetor aceleração angular $\vec{\alpha}$ do sólido S em função de g e da geometria do sistema.

GABARITO

(3,5 pontos) Questão 1 - Um bloco de massa m_B escorrega sobre o plano horizontal com coeficiente de atrito μ. O bloco está ligado a um cabo ideal cuja extremidade está presa na polia de massa m_P e raio R, cujo centro C é vinculado ao solo por meio de articulação sem atrito. No instante inicial, quando o sistema está em repouso, é aplicado um momento de binário M (constante) na polia de centro C, suficiente para acelerar o bloco.



$$J_{Cz} = \frac{m_P R^2}{2}$$

Sabe-se que a origem de x é tal que $x = 0$ para $\theta = 0$.

a) Determine a energia cinética do sistema em função da velocidade angular $\omega = \dot{\theta}$ da polia de centro C.

b) Determine velocidade angular ω da polia de centro C em função de θ.

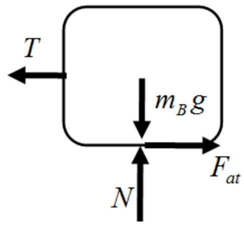
Solução

a)

Da geometria do sistema observa-se que $x = R\theta$, e que $\dot{x} = v = R\dot{\theta} = R\omega$ **0,5**

$$E = \underbrace{\frac{1}{2} m v^2}_{\substack{\text{bloco} \\ \text{translação}}} + \underbrace{\frac{1}{2} J_{Cz}\omega^2}_{\substack{\text{polia} \\ \text{rotação c/ eixo fixo}}} = \frac{1}{2} m_B (R\omega)^2 + \frac{1}{2}\frac{m_P R^2}{2}\omega^2 \Rightarrow \boxed{E = \frac{R^2\omega^2}{4}(m_P + 2m_B)}$$ **1,0**

b) Diagrama de corpo livre do bloco:



Na direção da normal:

$$m_B a_N = N - m_B g = 0 \quad \Rightarrow \quad N = m_B g$$

Como há escorregamento:

$$F_{at} = \mu N \quad \Rightarrow \quad F_{at} = \mu m_B g$$

0,5

Trabalho do momento de binário: $W_M = M\theta$ **0,5**

Trabalho da força de atrito: $W_A = F_{at} x = -\mu m_B g \theta R$ **0,5**

(a força de atrito tem sentido oposto ao do deslocamento)

Trabalho da força peso: $W_P = 0$

(não há deslocamento na direção vertical)

Nesse sistema o trabalho das forças internas é nulo.

Teorema da energia cinética (parte do repouso):

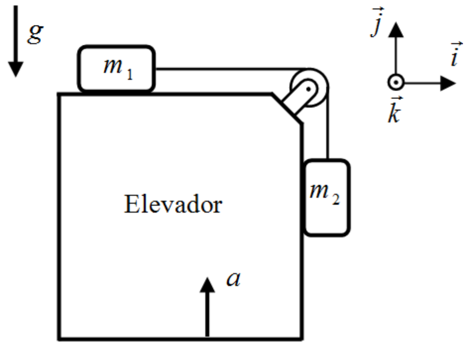
$$E_f - E_i = W_{EXT} \quad \Rightarrow \quad \frac{R^2\omega^2}{4}(m_P + 2m_B) = M\theta - \mu m_B g \theta R$$

$$\omega^2 = \frac{4}{R^2(m_P + 2m_B)}(M - \mu m_B g R)\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = \sqrt{\frac{4(M - \mu m_B g R)}{R^2(m_P + 2m_B)}\theta}}$$ **0,5**

GABARITO

(3,0 pontos) Questão 2 - Os blocos de massa m_1 e m_2 estão ligados por um cabo ideal, em um elevador cuja aceleração é $\vec{a} = a\vec{j}$, conhecida. A polia tem massa desprezível, e não há atrito na articulação. Também não há atrito entre os blocos e as superfícies com as quais estão em contato.

a) Desenhe os diagramas de corpo livre de cada bloco.
b) Calcule a tração T no cabo.



Solução:
a) Diagrama de corpo livre dos blocos: **1,0**

b) Observando a cinemática do sistema (cabo inextensível), temos que:

Bloco de massa m_1:

$$\vec{a}_1 = a_x\vec{i} + a\vec{j} \quad (1)$$

Bloco de massa m_2:

$$\vec{a}_2 = -a_x\vec{j} + a\vec{j} \quad (2)$$

0,5

Teorema da Resultante

$$m_1\vec{a}_1 = T\vec{i} + (N_1 - m_1 g)\vec{j} \quad \textbf{0,5} \quad (3)$$

Teorema da Resultante

$$m_2\vec{a}_2 = (T - m_2 g)\vec{j} \quad \textbf{0,5} \quad (4)$$

Substituindo (1) em (3):

$$m_1(a_x\vec{i} + a\vec{j}) = T\vec{i} + (N_1 - m_1 g)\vec{j}$$

Substituindo (2) em (4):

$$m_2(-a_x + a)\vec{j} = (T - m_2 g)\vec{j}$$

Na direção de $\vec{i}$:

$$m_1 a_x = T \quad \Rightarrow \quad a_x = \frac{T}{m_1} \quad (5)$$

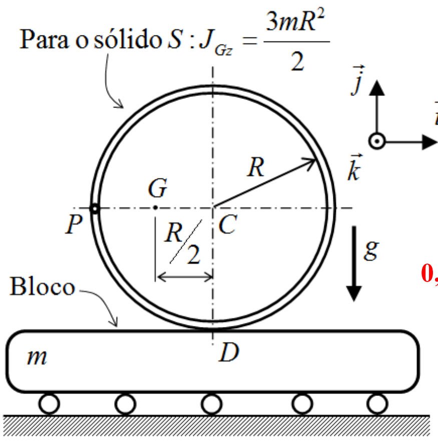
Na direção de $\vec{j}$:

$$-m_2 a_x + m_2 a = T - m_2 g \quad (6)$$

Substituindo (5) em (6):

$$-m_2\frac{T}{m_1} + m_2 a = T - m_2 g \quad \Rightarrow \quad -m_2 T + m_1 m_2 a = m_1 T - m_1 m_2 g \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)}(a + g)} \quad \textbf{0,5}$$

GABARITO



(3,5 pontos) Questão 3 - O sólido *S*, de centro de massa *G* e massa $2m$, é formado por um anel homogêneo de centro *C* e raio *R*, e um ponto material *P*, soldado na periferia do anel, conforme mostra a figura. O sólido *S* pode rolar sem escorregar sobre o bloco de massa m, que, por sua vez, se move sem atrito sobre o solo. O sistema é abandonado a partir do repouso na posição inicial mostrada na figura. No instante inicial, e considerando o bloco como referencial móvel:

0,5 a) Mostre que a aceleração relativa de *G* é $\vec{a}_{G,rel} = -\alpha R\vec{i} - \frac{\alpha R}{2}\vec{j}$, onde α é a aceleração angular do sólido *S*. Justifique porque a aceleração de arrastamento de *G* é $\vec{a}_{G,arr} = a_B\vec{i}$, onde $a_B\vec{i}$ é a aceleração do bloco. Explique porque a aceleração complementar de *G* é nula.

1,0 b) Desenhe os diagramas de corpo livre do sólido *S* e do bloco, separadamente.

1,0 c) Aplicando o teorema da resultante no sólido *S* e no bloco, separadamente, determine a força de atrito F_{at} e a normal N no ponto de contato *D*, em função da aceleração angular α do sólido *S*.

1,0 d) Calcule o vetor aceleração angular $\vec{\alpha}$ do sólido *S* em função de *g* e da geometria do sistema.

Solução

a) Movimento relativo - o sólido *S* rola sem escorregar: $\vec{a}_{C,rel} = \alpha R(-\vec{i}) \Rightarrow \vec{a}_{C,rel} = -\alpha R\vec{i}$

Para o centro de massa *G* do sólido *S* podemos usar o campo de acelerações:

$$\vec{a}_{G,rel} = \vec{a}_{C,rel} + \vec{\alpha} \wedge (G-C) + \underbrace{\vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G-C)]}_{\vec{0},\text{ parte do repouso}} = -\alpha R\vec{i} + \alpha\vec{k} \wedge \left(-\frac{R}{2}\vec{i}\right) \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{G,rel} = -\alpha R\vec{i} - \frac{\alpha R}{2}\vec{j}}$$

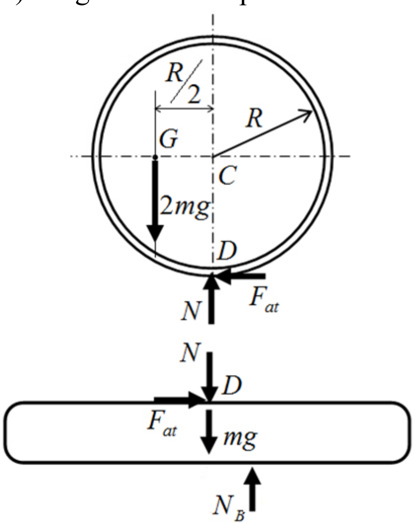
Obs.: no movimento relativo, não se pode afirmar a priori que o ponto *D* tenha aceleração nula (mesmo se fosse o CIR). Além disso, no instante inicial, não há um CIR para o movimento relativo, pois todos os pontos tem velocidade nula.

Movimento de arrastamento: bloco em translação, todos os pontos têm a mesma aceleração: $\boxed{\underbrace{\vec{a}_{G,arr} = a_B\vec{i}}_{\text{devido à translação}}}$

Aceleração complementar - o bloco apenas translada e $\underbrace{\vec{v}_{G,rel} = \vec{0}}_{\text{parte do repouso}}$, logo $\boxed{\vec{a}_{G,com} = 2\underbrace{\vec{\omega}_{arr}}_{\vec{0},\text{ translação}} \wedge \underbrace{\vec{v}_{G,rel}}_{\vec{0}} = \vec{0}}$

Aceleração absoluta do centro de massa *G* do sólido *S*: $\vec{a}_G = \vec{a}_{G,rel} + \vec{a}_{G,arr} + \vec{a}_{G,com} = -(a_B - \alpha R)\vec{i} - \frac{\alpha R}{2}\vec{j}$

b) Diagramas de corpo livre:



c) Teorema da resultante (TR) aplicado no sólido *S*:

$$2ma_{Gx} = -F_{at} \quad \Rightarrow \quad 2m(a_B - \alpha R) = -F_{at}$$

$$2ma_{Gy} = N - 2mg \Rightarrow 2m\left(-\frac{\alpha R}{2}\right) = N - 2mg \Rightarrow \boxed{N = m(2g - \alpha R)}$$

TR aplicado no bloco, na direção $\vec{i}$:

$$ma_B = F_{at} \quad \Rightarrow \quad a_B = \frac{F_{at}}{m}$$

Usando esse resultado na 1ª equação do TR aplicado no sólido *S*:

$$2m\left(\frac{F_{at}}{m} - \alpha R\right) = -F_{at} \quad \Rightarrow \quad 3F_{at} = 2mR\alpha \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_{at} = \frac{2mR}{3}\alpha}$$

d) Teorema da quantidade de movimento angular no sólido *S*:

$$J_{Gz}\alpha = M_G \quad \Rightarrow \quad \frac{3mR^2}{2}\alpha = N\frac{R}{2} - F_{at}R$$

Substituindo N e F_{at} encontrados anteriormente: $\frac{3mR^2}{2}\alpha = m(2g - \alpha R)\frac{R}{2} - \frac{2mR}{3}\alpha R \quad \Rightarrow$

$$\left(\frac{3mR^2}{2} + \frac{mR^2}{2} + \frac{2mR^2}{3}\right)\alpha = 2mg\frac{R}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{8mR^2}{3}\alpha = mgR \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\alpha} = \frac{3g}{8R}\vec{k}}$$