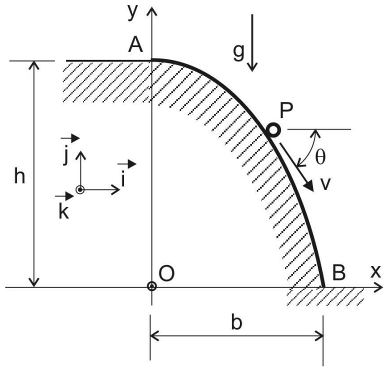
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231 CEP 05508-970, São Paulo, SP
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886
Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 – MECÂNICA I – Terceira Prova – 25 de novembro de 2014

Duração da Prova: 110 minutos

- **Não é permitido o uso de dispositivos eletrônicos, como calculadoras, "tablets" e celulares.**
- **A partir do momento em que a Prova for encerrada, não é permitido ao aluno escrever mais nada na folha de respostas, havendo possibilidade de anulação da respectiva prova se isto ocorrer.**

Questão 1 (3,0 pontos): O ponto material *P*, de massa *m*, desloca-se no plano vertical *Oxy* sob a ação da gravidade, deslizando sem atrito sobre um "tobogã", representado na figura pela curva plana *AB*, definida pela equação $y = h\left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right)$.



No instante inicial, o ponto *P* é largado na posição *A*, com uma velocidade horizontal v_0 para a direita. Nestas condições:

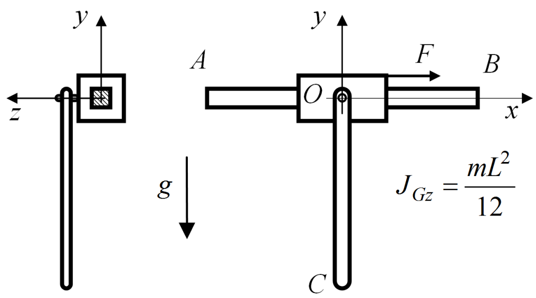
a) faça o diagrama de corpo livre do ponto *P*, e obtenha a relação das componentes a_x e a_y da sua aceleração, em função de θ e dos esforços aplicados;

b) obtenha o valor máximo da velocidade inicial v_0 para que o ponto *P* não perca contato com o tobogã;

c) indique as forças que realizam trabalho durante o movimento, justificando a resposta, e obtenha a expressão do módulo da velocidade que o ponto *P* terá na posição *B*, em função da velocidade inicial e dos dados da figura;

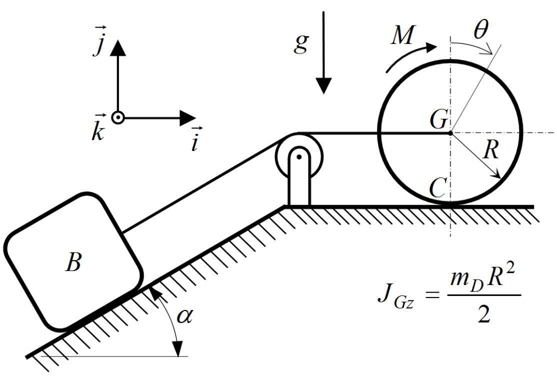
d) expresse a velocidade de P em função de θ e determine os versores de Frenet $\vec{t}$ e $\vec{n}$.

Questão 2 (3,5 pontos): O anel de seção retangular e massa *m* pode deslizar sem atrito sobre a guia horizontal *AB*. A barra homogênea *OC*, de comprimento *L* e massa *m* é articulada sem atrito ao anel por meio de um pino horizontal em *O*. É aplicada ao anel uma força *F* horizontal. Sabendo que o sistema parte do repouso, com a barra pendente na vertical, pede-se determinar:



a) o diagrama de corpo livre para a barra;

b) para o instante inicial, a aceleração angular da barra, a aceleração do anel e a reação da articulação sobre a barra em *O*.



Questão 3 (3,5 pontos): O disco de raio *R* e massa m_D, rola sem escorregar num plano horizontal, partindo do repouso em $\theta = 0^o$, quando um binário de momento *M* é aplicado. Um cabo ideal une o centro do disco *G* ao bloco *B*, por meio de uma polia de inércia desprezível. O bloco *B* de massa m_B escorrega sobre o plano com inclinação α e coeficiente de atrito μ.

a) Determine o momento de inércia do disco J_{Cz} em relação ao eixo perpendicular ao plano da figura (direção $\vec{k}$) que passa pelo ponto *C* de contato com o solo.

b) Usando J_{Cz}, determine a energia cinética do sistema em função da velocidade angular ω do disco.

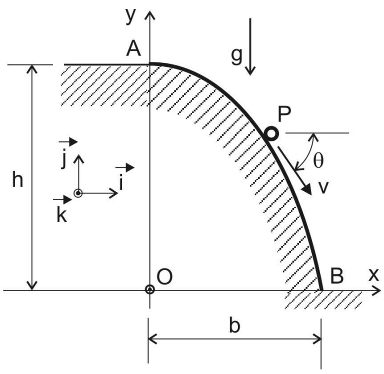
c) Determine o vetor de rotação $\vec{\omega}$ do disco em função de θ.

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231 CEP 05508-970, São Paulo, SP
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

Questão 1 (3,0 pontos): O ponto material *P*, de massa *m*, desloca-se no plano vertical *Oxy* sob a ação da gravidade, deslizando sem atrito sobre um "tobogã", representado na figura pela curva plana *AB*, definida pela equação $y = h\left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right)$. No instante inicial, o ponto *P* é largado na posição *A*, com uma velocidade horizontal v_0 para a direita. Nestas condições:



a) faça o diagrama de corpo livre do ponto *P*, e obtenha a relação das componentes a_x e a_y da sua aceleração, em função de θ e dos esforços aplicados;

b) obtenha o valor máximo da velocidade inicial v_0 para que o ponto *P* não perca contato com o tobogã em nenhum instante durante o movimento.

c) indique as forças que realizam trabalho durante o movimento, justificando a resposta, e obtenha a expressão do módulo da velocidade que o ponto *P* terá na posição *B*, em função da velocidade inicial e dos dados da figura;

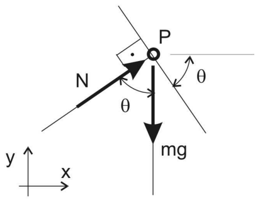
d) expresse a velocidade de P em função de θ e determine os versores de Frenet $\vec{t}$ e $\vec{n}$.

Solução:

a) 1.0 Pela 2ª lei de Newton, temos:

$$\boxed{m\,a_x = N \text{ sen } \theta} \qquad (1)$$

$$\boxed{m\,a_y = N \cos\theta - mg} \qquad (2)$$



b) 0,5 A força normal de contato *N* não pode ser negativa; no limite, esta força é nula.
Da equação (1), temos:

$a_x = 0 \;\Rightarrow\; v_x = v_0 \;\Rightarrow\; x = v_0 t$ (3)

e, da equação (2), temos:

$a_y = -g \;\Rightarrow\; v_y = -gt \;\Rightarrow\; y = h - gt^2/2$ (4)

Substituindo (3) e (4) na equação da trajetória, dada inicialmente, obtemos:

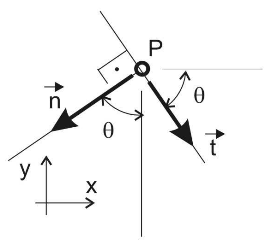
$$y = h\,(1 - x^2/b^2) \;\Rightarrow\; h - gt^2/2 = h\,[1 - (v_0 t)^2/b^2] \;\Rightarrow\; \boxed{v_{0_{MAX}}^2 = \frac{b^2 g}{2h}}$$

c) 0,5 Não há atrito, a força normal *N* não realiza trabalho (é sempre ortogonal à trajetória) e o único trabalho é aquele realizado pela força peso. Assim, pelo Teorema da Energia:

$$mv^2/2 - mv_0^2/2 = mgh \;\Rightarrow\; \boxed{v^2 = v_0^2 + 2gh}$$

d) 1,0 Expressão da velocidade do ponto P en função de θ

$$\boxed{\vec{v} = v\cos\theta\,\vec{i} - v\,sen\,\theta\,\vec{j}}$$



Observando a figura:

Versores de Frenet: $\boxed{\vec{t} = \cos\theta\,\vec{i} - sen\,\theta\,\vec{j}}$ e $\boxed{\vec{n} = -sen\,\theta\,\vec{i} - \cos\theta\,\vec{j}}$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

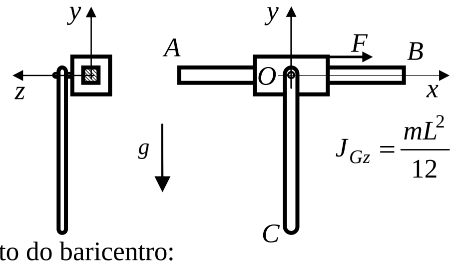
Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231   CEP 05508-970, São Paulo, SP
Telefone: (0xx11) 3091 5337   Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

Questão 2 (3,5 pontos): O anel de seção retangular e massa m pode deslizar sem atrito sobre a guia horizontal AB. A barra homogênea OC, de comprimento L e massa m é articulada sem atrito ao anel por meio de um pino horizontal em O. É aplicada ao anel uma força F horizontal. Sabendo que o sistema parte do repouso, com a barra pendente na vertical, pede-se determinar:

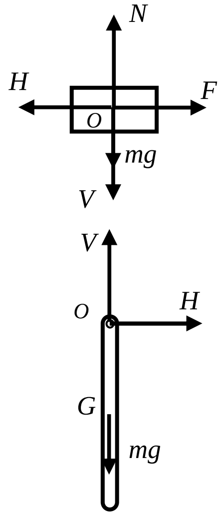
a) o diagrama de corpo livre para a barra;

b) para o instante inicial, a aceleração angular da barra, a aceleração do anel e a reação da articulação sobre a barra em O.



Solução

a) 1,0 Diagramas de corpo livre:



b) 2,5 Teorema do movimento do baricentro:

Anel:

$$ma_{Ox} = F - H$$

$$ma_{Oy} = N - V - mg = 0$$

Barra:

$$ma_{Gx} = H$$

$$ma_{Gy} = V - mg$$

Teorema do momento da quantidade de movimento para a barra:

$$J_{Gz}\dot{\omega} = -H\frac{L}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{mL^2}{12}\dot{\omega} = -H\frac{L}{2} \Rightarrow H = -\frac{mL}{6}\dot{\omega}$$

Da cinemática, no instante inicial, quando $\vec{\omega} = \vec{0}$:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_O + \vec{\alpha} \wedge (G - O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G - O)] = a_{Ox}\vec{i} + \dot{\omega}\frac{L}{2}\vec{i}$$

Ou seja, no instante inicial $a_{Gy} = 0 \Rightarrow V = mg$

Substituindo nas equações do teorema do movimento do baricentro da barra e do anel:

Barra: $m\left(a_{Ox} + \dot{\omega}\frac{L}{2}\right) = -\frac{mL}{6}\dot{\omega}$

Anel: $ma_{Ox} = F - \left(-\frac{mL}{6}\dot{\omega}\right)$

Portanto:

$$F + 2\frac{mL}{6}\dot{\omega} = -m\dot{\omega}\frac{L}{2} \Rightarrow \frac{5mL}{6}\dot{\omega} = -F \Rightarrow \boxed{\dot{\omega} = -\frac{6F}{5mL}}$$

Também resulta que $H = -\frac{mL}{6}\left(-\frac{6F}{5mL}\right) \Rightarrow H = \frac{F}{5}$

Substituindo na equação do teorema do movimento do baricentro do anel na direção horizontal:

$$ma_{Ox} = F - \frac{F}{5} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_O = \frac{4F}{5m}\vec{i}}$$

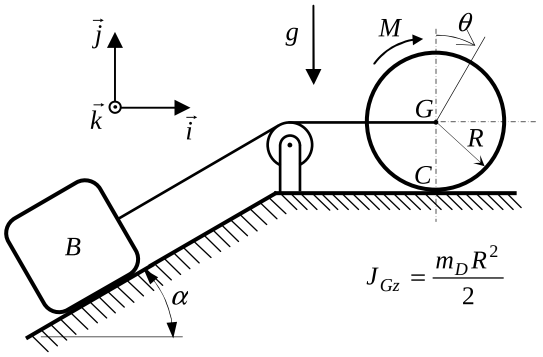
Dos resultados anteriores:

$$\vec{R} = H\,\vec{i} + V\,\vec{j} \Rightarrow \boxed{\vec{R} = \frac{F}{5}\vec{i} + mg\,\vec{j}}$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231 CEP 05508-970, São Paulo, SP
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica



Questão 3 (3,5 pontos): O disco de raio R e massa m_D, rola sem escorregar num plano horizontal, partindo do repouso, quando um binário de momento M é aplicado. Um cabo ideal une o centro do disco G ao bloco B, por meio de uma polia de inércia desprezível. O bloco B de massa m_B escorrega sobre o plano com inclinação α e coeficiente de atrito μ.

a) Determine o momento de inércia do disco J_{Cz} em relação ao eixo perpendicular ao plano da figura (direção $\vec{k}$) que passa pelo ponto C de contato com o solo.

b) Usando J_{Cz}, determine a energia cinética do sistema em função da velocidade angular ω do disco.

c) Determine o vetor de rotação $\vec{\omega}$ do disco em função de θ.

Solução

a) 0,5 Teorema dos eixos paralelos:

$$J_{Cz} = J_{Cz} + m_D R^2 = \frac{m_D R^2}{2} + m_D R^2 = \frac{3m_D R^2}{2}$$

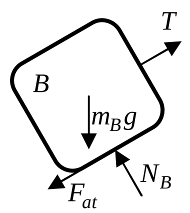
b) 1,0 O sistema parte do repouso $\Rightarrow E_0 = 0$, C é o CIR do disco, e observa-se que a velocidade do bloco é igual, em módulo, à velocidade do centro de massa do disco:

$$E = \frac{1}{2} m v_B^2 + \frac{1}{2} J_{Cz}\omega^2 \Rightarrow E = \frac{1}{2} m_B v_G^2 + \frac{1}{2}\frac{3m_D R^2}{2}\omega^2$$

Aplicando a expressão do campo de velocidades: $\vec{v}_G = \vec{v}_C + \vec{\omega} \wedge (G - C) \Rightarrow v_G = \omega R$

Então: $E = \frac{1}{2} m_B (\omega R)^2 + \frac{3m_D R^2}{4}\omega^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{E(\omega) = \frac{1}{4}(2m_B + 3m_D)R^2\omega^2}$

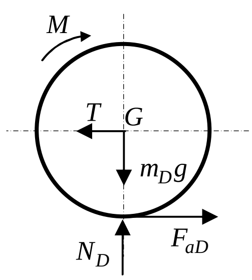
c) 2,0 O trabalho das forças externas: a força de atrito F_{at}, a força peso do bloco e o binário de momento M realizam trabalho:



$$W^{ext} = M\theta - m_B g \theta R sen\alpha - F_{at}\theta R$$

Como há escorregamento: $F_{at} = \mu N = \mu m_B g \cos\alpha$

$$W^{ext} = M\theta - m_B g(sen\alpha + \mu\cos\alpha)\theta R$$



Portanto, aplicando o TEC:

$$\frac{1}{4}(2m_B + 3m_D)R^2\omega^2 = M\theta - m_B g(sen\alpha + \mu\cos\alpha)\theta R \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{\omega} = -\sqrt{\frac{4[M - m_B g(sen\alpha + \mu\cos\alpha)R]\ \theta}{(2m_B + 3m_D)R^2}}\ \vec{k}}$$