ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 2100 – MECÂNICA A – Terceira Prova – 26 de novembro de 2013

Duração da Prova: 100 minutos

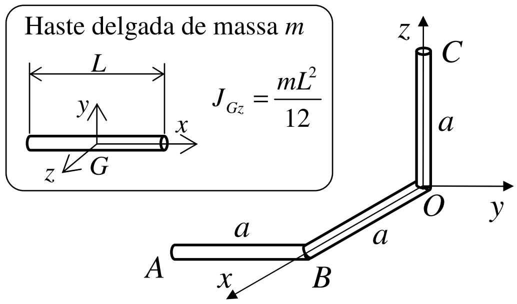
Obs. 1: não é permitido o uso de dispositivos eletrônicos como calculadoras, tablets e celulares.

Obs. 2: a partir do momento em que a Prova for encerrada, não é permitido ao aluno escrever mais nada na folha de respostas, havendo possibilidade de anulação da respectiva prova se isto ocorrer.

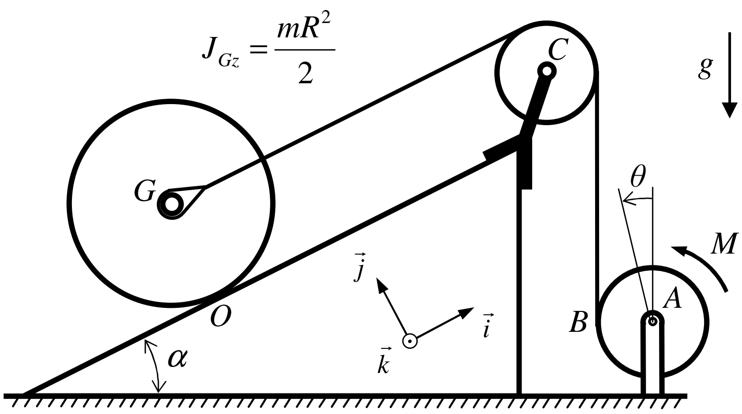
QUESTÃO 1 (2,0 pontos) – O sólido é composto por três barras homogêneas de mesma massa m, mesmo comprimento a e diâmetro desprezível, soldadas entre si no formato mostrado na figura. A barra AB é paralela ao eixo Oy. Usando o sistema de coordenadas $Oxyz$, determine:

a) O momento de inércia J_{Oz} do sólido.

b) O produto de inércia J_{Oxy} do sólido.



QUESTÃO 2 (4,0 pontos) – Um disco de massa m, raio R e centro G rola sem escorregar em um plano inclinado fixo, como indicado na figura. O disco é tracionado por um fio inextensível, de massa desprezível, que está conectado a um outro disco, de massa $m/2$, raio $R/2$ e centro A fixo. O sistema encontra-se inicialmente em repouso com ângulo $\theta = 0$. Não há atrito nas articulações. Em um dado instante, aplica-se um momento constante e conhecido $\vec{M} = M\vec{k}$ no disco com centro A.



Sabendo que a polia com centro C tem massa desprezível, determine:

a) A energia cinética do sistema em função da velocidade $\vec{v}_G$ do centro do disco de raio R.

b) A velocidade $\vec{v}_G$, do centro do disco de raio R, em função do ângulo θ do disco de centro A.

c) A aceleração $\vec{a}_G$, do centro do disco de raio R, em função do ângulo θ do disco de centro A.

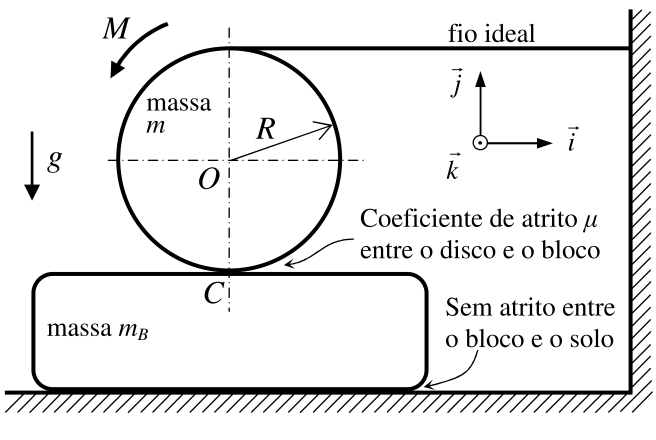
QUESTÃO 3 (4,0 pontos) – O sistema mostrado na figura é composto por um disco de massa m e raio R e um bloco de massa m_B. O disco é acionado por um binário de momento M. Não há escorregamento entre o disco e o bloco e entre o fio ideal e o disco. Pede-se:

a) Os diagramas de corpo livre do disco e do bloco.

b) A aceleração $\vec{a}_O$ do centro O do disco e a aceleração $\vec{a}_B$ do bloco em função da aceleração angular $\dot{\omega}$ do disco.

c) Calcular a aceleração angular $\dot{\omega}$ do disco, a aceleração $\vec{a}_O$ do centro O do disco, a aceleração $\vec{a}_B$ do bloco, a força de atrito F_{at} entre o disco e o bloco e a tração T no fio.

d) Calcular o momento máximo M_{max} que pode ser aplicado sem que ocorra escorregamento no contato entre o disco e o bloco.



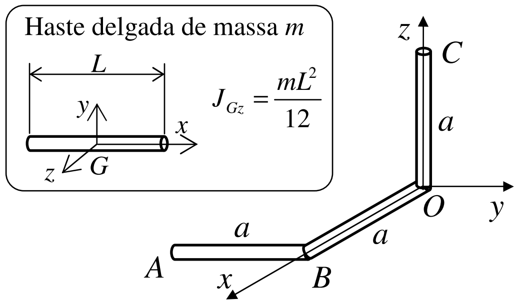
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

QUESTÃO 1 (2,0 pontos) – O sólido é composto por três barras homogêneas de mesma massa *m*, mesmo comprimento *a* e diâmetro desprezível, soldadas entre si no formato mostrado na figura. A barra *AB* é paralela ao eixo *Oy*. Usando o sistema de coordenadas *Oxyz*, determine:

a) O momento de inércia J_{Oz} do sólido.

b) O produto de inércia J_{Oxy} do sólido.



1,0 a) Momento de inércia:

Trecho *CO*:

$J_{OzCO} = 0$ (Diâmetro desprezível)

Trecho *BO*:

$$J_{OzBO} = J_G + m\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{ma^2}{12} + \frac{ma^2}{4} \Rightarrow J_{OzBO} = \frac{ma^2}{3} \quad \text{(Teorema dos eixos paralelos)}$$

Trecho *AB*:

$$J_{OzAB} = J_G + m\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2\right] = \frac{ma^2}{12} + \frac{ma^2}{4} + ma^2 \Rightarrow J_{OzAB} = \frac{4ma^2}{3} \quad \text{(Teorema dos eixos paralelos)}$$

Portanto:

$$J_{Oz} = J_{OzCO} + J_{OzBO} + J_{OzAB} = \frac{ma^2}{3} + \frac{4ma^2}{3} \Rightarrow \boxed{J_{Oz} = \frac{5ma^2}{3}} \quad \text{(Composição de momentos de inércia)}$$

1,0 b) Produto de inércia

Trecho *CO*:

$J_{OxyCO} = 0$, pois a coordenada *y* do trecho é nula.

Trecho *BO*:

$J_{OxyBO} = 0$, pois a coordenada *y* do trecho é nula.

Trecho *AB*:

$$J_{OxyAB} = J_{GxyAB} + ma\left(-\frac{a}{2}\right) = 0 - \frac{ma^2}{2} \Rightarrow J_{OxyAB} = -\frac{ma^2}{2} \quad \text{(Teorema dos eixos paralelos)}$$

Solução alternativa para o trecho *AB*

Usando a definição de produto de inércia:

$$J_{OxyAB} = \int_{-a}^{0} ay\frac{m}{a}dy = -\frac{ma^2}{2} \Rightarrow J_{OxyAB} = -\frac{ma^2}{2}$$

Portanto:

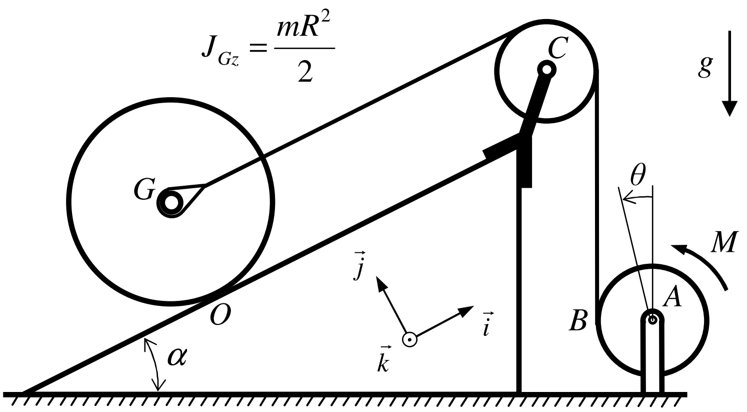
$$J_{Oxy} = J_{OxyCO} + J_{OxyBO} + J_{OxyAB} = 0 + 0 - \frac{ma^2}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{J_{Oxy} = -\frac{ma^2}{2}} \quad \text{(Composição de produtos de inércia)}$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

QUESTÃO 2 (4,0 pontos) – Um disco de massa m, raio R e centro G rola sem escorregar em um plano inclinado fixo, como indicado na figura. O disco é tracionado por um fio inextensível, de massa desprezível, que está conectado a um outro disco, de massa $m/2$, raio $R/2$ e centro A fixo. O sistema encontra-se inicialmente em repouso com ângulo $\theta = 0$. Não há atrito nas articulações. Em um dado instante, aplica-se um momento constante e conhecido $\vec{M} = M\vec{k}$ no disco com centro A.



Sabendo que a polia com centro C tem massa desprezível, determine:

a) A energia cinética do sistema em função da velocidade $\vec{v}_G$ do centro do disco de raio R.

b) A velocidade $\vec{v}_G$, do centro do disco de raio R, em função do ângulo θ do disco de centro A.

c) A aceleração $\vec{a}_G$, do centro do disco de raio R, em função do ângulo θ do disco de centro A.

a) Relações cinemáticas:

Disco de centro G e raio R: $|v_G| = |\omega R| \Rightarrow |\omega| = \frac{1}{R}|v_G|$

0,5

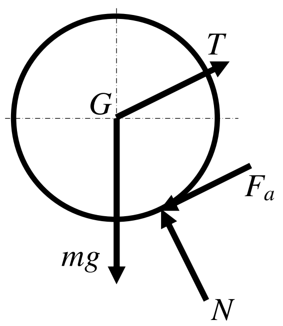
Disco de centro A e raio $R/2$: $|v_B| = |\dot{\theta}|\frac{R}{2}$ e $|v_B| = |v_G|$, portanto: $|\dot{\theta}| = \frac{2}{R}|v_G|$

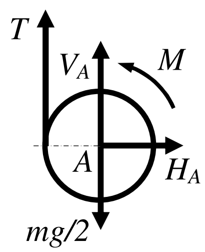
Energia cinética:

$$E = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\frac{1}{R^2}v_G^2 + \frac{1}{2}\frac{\frac{m}{2}\left(\frac{R}{2}\right)^2}{2}\frac{4}{R^2}v_G^2 = \underbrace{\frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{4}mv_G^2}_{0,5} + \overbrace{\frac{1}{8}mv_G^2}^{0,5} \Rightarrow$$

$$\boxed{E = \frac{7}{8}mv_G^2}$$

b) Diagramas de corpo livre





As únicas forças externas que realizam trabalho são a força peso do disco de centro G e o binário de momento M. No caso das forças internas, o fio é inextensível e de massa desprezível, a polia de centro C também tem massa desprezível, e não há atrito nas articulações, logo o trabalho é nulo.

Relações geométricas, disco de centro G:
Deslocamento do baricentro G na direção $\vec{i}$: x
Deslocamento vertical do baricentro G: $h = x\operatorname{sen}\alpha$

Relações geométricas, disco de centro A: $x = \frac{R}{2}\theta \Rightarrow h = \frac{R}{2}\theta\operatorname{sen}\alpha$

Trabalho:

$$W = -mgh + M\theta = \underbrace{-mg\frac{R}{2}\operatorname{sen}\alpha\theta}_{\boxed{0,5}} + \underbrace{M\theta}_{\boxed{0,5}} \Rightarrow W = \left(-mg\frac{R}{2}\operatorname{sen}\alpha + M\right)\theta$$

TEC (parte do repouso):

$$E = W \Rightarrow \frac{7}{8}mv_G^2 = -\left(mg\frac{R}{2}\operatorname{sen}\alpha + M\right)\theta \Rightarrow v_G^2 = \frac{8}{7m}\left(-mg\frac{R}{2}\operatorname{sen}\alpha + M\right)\theta \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{v}_G = \sqrt{\frac{8}{7m}\left(-mg\frac{R}{2}\operatorname{sen}\alpha + M\right)\theta}\,\vec{i}}$$

0,5

c) Aceleração

$$v_G^2 = \frac{8}{7m}\left(-mg\frac{R}{2}\operatorname{sen}\alpha + M\right)\theta \Rightarrow 2v_G\dot{v}_G = \frac{8}{7m}\left(-mg\frac{R}{2}\operatorname{sen}\alpha + M\right)\dot{\theta}$$

Como $\dot{\theta} = \frac{2}{R}v_G$, temos:

$$2v_G\dot{v}_G = \frac{8}{7m}\left(-mg\frac{R}{2}\operatorname{sen}\alpha + M\right)\frac{2}{R}v_G$$

$$a_G = \frac{8}{7mR}\left(-mg\frac{R}{2}\operatorname{sen}\alpha + M\right)$$

1,0

$$\boxed{\vec{a}_G = \frac{8}{7mR}\left(-mg\frac{R}{2}\operatorname{sen}\alpha + M\right)\vec{i}}$$

pode-se observar que $\vec{a}_G$ não depende de θ.

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

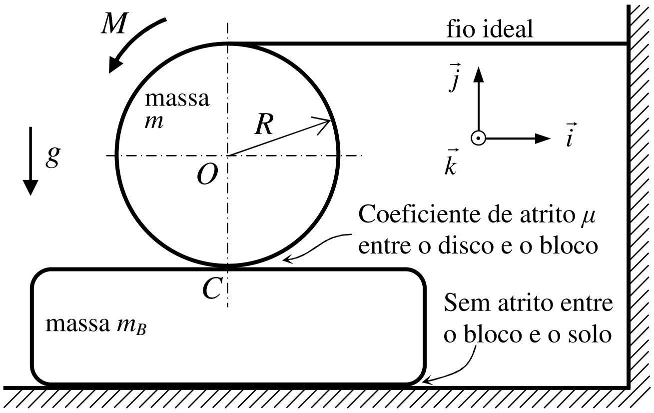
QUESTÃO 3 (4,0 pontos) – O sistema mostrado na figura é composto por um disco de massa m e raio R e um bloco de massa m_B. O disco é acionado por um binário de momento M. Não há escorregamento entre o disco e o bloco e entre o fio ideal e o disco. Pede-se:

a) Os diagramas de corpo livre do disco e do bloco.

b) A aceleração $\vec{a}_O$ do centro O do disco e a aceleração $\vec{a}_B$ do bloco em função da aceleração angular $\dot{\omega}$ do disco.

c) Calcular a aceleração angular $\dot{\omega}$ do disco, a aceleração $\vec{a}_O$ do centro O do disco, a aceleração $\vec{a}_B$ do bloco, a força de atrito F_{at} entre o disco e o bloco e a tração T no fio.

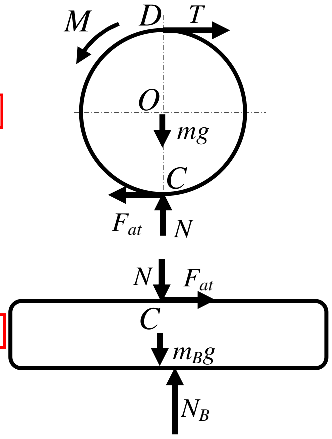
d) Calcular o momento máximo M_{max} que pode ser aplicado sem que ocorra escorregamento no contato entre o disco e o bloco.



a) Diagramas de corpo livre:

0,5

0,5



0,5 b) Relações cinemáticas (pontos O e C do disco)

$$\boxed{\vec{a}_O = \dot{\omega}R\vec{i}} \quad \text{e} \quad \vec{a}_C = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge (C-O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (C-O)]$$

$$\Rightarrow \vec{a}_C = \dot{\omega}2R\vec{i} + \omega^2 R\vec{j}$$

Como não há escorregamento no ponto C na direção $\vec{i}$, e observando que a aceleração do bloco B é apenas na direção $\vec{i}$ (bloco em translação apenas), então: $\boxed{\vec{a}_B = \dot{\omega}2R\vec{i}}$

c) TMB para o bloco:

$$m_B a_{Bx} = F_{at} \Rightarrow \boxed{F_{at} = m_B 2R\dot{\omega}}$$

0,5

$$m_B a_{By} = N_B - N - m_B g = 0$$

TMB para o disco:

$$m a_{Ox} = T - F_{at} \Rightarrow \boxed{T = mR\dot{\omega} + m_B 2R\dot{\omega}}$$

$$m a_{Oy} = N - mg = 0 \Rightarrow \boxed{N = mg}$$

0,5

TQMA para o disco, polo no baricentro O: $\dfrac{mR^2}{2}\dot{\omega} = M - TR - F_{at}R$

Substituindo: $\dfrac{mR^2}{2}\dot{\omega} = M - (mR\dot{\omega} + m_B 2R\dot{\omega})R - m_B 2R\dot{\omega}R \Rightarrow \left(\dfrac{mR^2}{2} + mR^2 + 2m_B R^2 + 2m_B R^2\right)\dot{\omega} = M$

0,5

$$\frac{(3m+8m_B)}{2}R^2\dot{\omega} = M \Rightarrow \boxed{\dot{\omega} = \frac{2M}{(3m+8m_B)R^2}}$$

Substituindo:

$$\boxed{\vec{a}_O = \frac{2M}{(3m+8m_B)R}\vec{i}} \qquad \boxed{\vec{a}_B = \frac{4M}{(3m+8m_B)R}\vec{i}} \qquad \boxed{F_{at} = \frac{4Mm_B}{(3m+8m_B)R}} \qquad \boxed{T = \frac{2M(m+2m_B)}{(3m+8m_B)R}}$$

0,5

0,5 d) Modelo de atrito: $F_{at} \le \mu N$

$$\frac{4Mm_B}{(3m+8m_B)R} \le \mu mg \Rightarrow M \le \frac{\mu mg(3m+8m_B)R}{4m_B} \Rightarrow \boxed{M_{\max} = \frac{\mu mg(3m+8m_B)R}{4m_B}}$$