ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 2100 Mecânica A

3ª Prova - Duração 100 minutos – 27 de novembro de 2012 GABARITO

1 - Não é permitido o uso de calculadoras.

2 – A partir do momento em que a Prova for encerrada, não é permitido ao aluno escrever mais nada na folha de respostas, havendo possibilidade de anulação da respectiva prova se isto ocorrer.

Questão 1 (3,0 pontos):

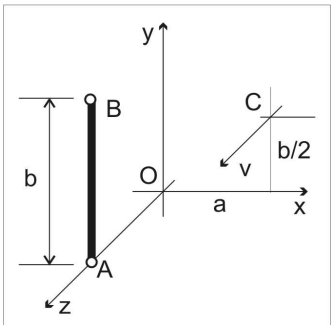


Figura (a)

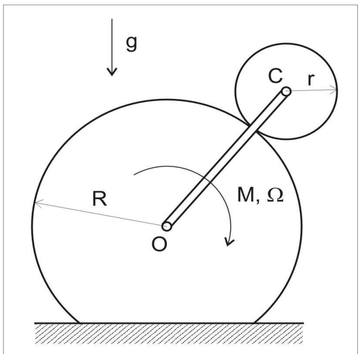


Figura (b)

(a) Na figura (a), a barra AB é homogênea e uniforme, tem massa m, e o seu momento de inércia em relação ao eixo Oz é $J_{Oz} = m.b^2/3$. Calcule o momento de inércia dessa barra em relação ao eixo Cv, que passa pelo ponto C (a, b/2, 0) e é paralelo a Oz.

(b) Na figura (b), o disco (C, r) tem massa m e rola sem escorregar sobre a circunferência do disco fixo (O, R). A barra OC tem massa desprezível, foi montada com uma tração inicial T, gira em torno de O com velocidade angular Ω e tem um momento de binário M aplicado a ela. O coeficiente de atrito entre os discos é μ, e o momento de inércia do disco (C, r) em relação ao eixo ortogonal ao seu plano e que passa por C é $J_C = m.r^2/2$. Calcule a energia cinética do disco (C, r)em função de Ω.

(c) Na mesma figura (b), suponha M constante, isole o disco (C, r) e calcule o trabalho realizado por todos os esforços que agem nele, desde a posição inicial, quando a barra OC está na posição vertical, até o instante em que a barra OC está na posição horizontal. A aceleração da gravidade é g, vertical.

Solução:

(a) Baricentro G da barra AB:

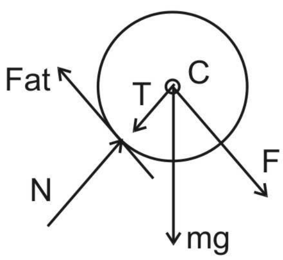
$J_{Gz} = J_{Az} – m.(b/2)^2 = m.b^2/3 – m.(b/2)^2 = m.b^2/12$

$J_{Cv} = J_{Gz} + m.a^2 = m.b^2/12 + m.a^2 \Rightarrow \boxed{\mathbf{J_{Cv} = m.(b^2/12 + a^2)}\quad \mathbf{(1,0)}}$

(b) $v_C = \Omega.(R + r) = \omega.r \Rightarrow \omega = \Omega.(R + r)/r$

$EC = m.v_C^2/2 + J_C.\omega^2/2 = m.[\Omega.(R + r)]^2/2 + m.r^2[\ \Omega.(R + r)/r\ ]^2/4 \Rightarrow \boxed{\mathbf{EC = 3.m.[\Omega.(R + r)]^2/4}}$ $\boxed{\mathbf{(1,0)}}$

(c) Do TQMA para a barra OC, com polo O: F = M/(R + r)

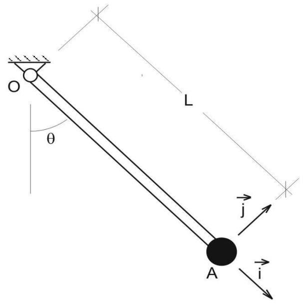


As únicas forças que realizam trabalho são o peso e F, esta constante. **(0,5) dcl**

Assim, entre as posições pedidas:

$\tau = mg.(R + r) + F.2\pi.(R +r)/4 \Rightarrow \boxed{\mathbf{\tau = mg.(R + r) + M.\pi/2}\ \mathbf{(0,5)}}$

Questão 2(3,5 pontos): A barra homogênea OA de comprimento L e peso mg, articulada em O, tem em sua extremidade um peso concentrado 2mg. O conjunto parte do repouso na posição horizontal. Determine:



a) o baricentro G e o momento de inércia do conjunto em relação a O;

b) a velocidade angular e a aceleração angular em função de θ;

c) a aceleração do baricentro do conjunto;

d) as reações vinculares da articulação em O.

Dado o momento de inércia de uma barra homogênea de comprimento L e massa m em relação ao seu baricentro: $J = m.L^2/12$

Solução:

a) A posição do baricentro G é $OG = \dfrac{m\frac{L}{2} + 2mL}{3m} = \dfrac{5}{6}L$ (0,5)

O momento de inércia em relação a O: $J_O = \dfrac{mL^2}{12} + \dfrac{mL^2}{4} + 2mL^2 = \dfrac{7}{3}mL^2$. (0,5)

b) Teorema da Energia Cinética:

$$\Delta T = \tau \Rightarrow \frac{J_O\omega^2}{2} = 3mg\frac{5}{6}L\cos\theta \Rightarrow \omega^2 = \frac{15}{7}\frac{g}{L}\cos\theta$$ (0,5)

Derivando em relação ao tempo:

$$2\omega\dot{\omega} = \frac{15}{7}\frac{g}{L}(-\operatorname{sen}\theta)\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\omega} = -\frac{15}{14}\frac{g}{L}\operatorname{sen}\theta$$ (0,5)

c) A aceleração do baricentro é:

$$\vec{a}_G = OG\omega^2(-\vec{i}) + OG\dot{\omega}\vec{j} = -\frac{75}{42}g\cos\theta\vec{i} - \frac{75}{84}g\operatorname{sen}\theta\vec{j}$$ (0,5)

d) Teorema do Movimento do Baricentro:

$$3m\vec{a}_G = X_O\vec{i} + Y_O\vec{j} + 3mg\cos\theta\vec{i} - 3mgsen\theta\vec{j}$$

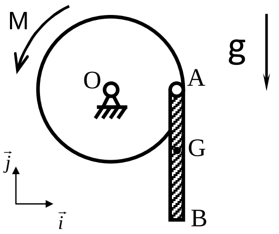
$$X_O = -\frac{117}{14}mg\cos\theta$$ (0,5) + (0,5)

$$Y_O = \frac{9}{28}mgsen\theta$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

3ª Questão (3,5 pontos): No sistema mostrado na figura, o disco de massa m e raio R está articulado no ponto A à barra AB, de massa m e comprimento L. Num dado instante, o disco, inicialmente em repouso, é submetido a um binário $\vec{M} = M\vec{k}$. Para o instante da aplicação de $\vec{M}$, pede-se:

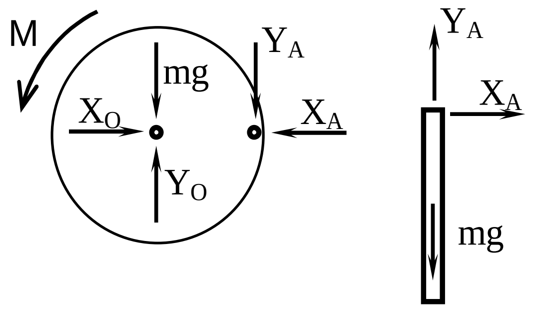


a) Os diagramas de corpo livre do disco e da barra
b) A aceleração do ponto A em função da aceleração $\dot{\vec{\omega}}$ do disco
c) A aceleração angular $\dot{\vec{\Omega}}$ da barra (sugestão: utilize o polo A)
d) A aceleração angular $\dot{\vec{\omega}}$ do disco e as reações vinculares no ponto A

Dados: para o disco $J_{z_O} = \dfrac{mR^2}{2}$ e para a barra $J_{z_G} = \dfrac{mL^2}{12}$

SOLUÇÃO

(a)



(1,0)

(b) Relação cinemática para o disco no instante pedido

$$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge (A - O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (A - O)]$$

Como $\vec{a}_A = \vec{0}$ e $\vec{\omega} = \vec{0}$, $\boxed{\vec{a}_A = \dot{\omega} R\, \vec{j}}$ **(0,5)**

(c) Teorema do momento angular para a barra, polo A

$$\frac{d}{dt}\left(\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}[I_A]\{\Omega\}\right) + m(G - A) \wedge \vec{a}_A = \vec{M}_A$$

Como $\vec{M}_A = \vec{0}$ e $m(G - A) \wedge \vec{a}_A = -m\dfrac{L}{2}\vec{j} \wedge \dot{\omega} R\, \vec{j} = \vec{0}$, tem-se $J_{z_A}\dot{\Omega} = 0 \Rightarrow \boxed{\dot{\vec{\Omega}} = \vec{0}}$ **(1,0)**

(d) **(1,0)** Relação cinemática para a barra $\vec{a}_G = \vec{a}_A = \dot{\omega} R\, \vec{j}$

Teorema do movimento do baricentro para a barra

$$\begin{cases} \Sigma F_x = m a_{G_x} = 0 \\ \Sigma F_y = m a_{G_y} \end{cases} \Rightarrow Y_A - mg = m\dot{\omega}R \quad (I) \text{ e } \boxed{X_A = 0}$$

Teorema do momento angular para o disco, polo O

$$\frac{d}{dt}\left(\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}[I_O]\{\omega\}\right)+m(G-O)\wedge\vec{a}_O=\vec{M}_O \quad \Rightarrow J_{z_O}\dot{\omega}=M-Y_A R$$

Substituindo Y_A obtido na Equação (I) e o valor de J_{z_O}, tem-se $\boxed{\dot{\vec{\omega}}=\frac{2M-2mgR}{3mR^2}\vec{k}}$

Substituindo na Equação (I), tem-se $\boxed{Y_A=\frac{mg}{3}+\frac{2M}{3R}}$

Alternativa de solução do item c

Teorema do momento angular para a barra, polo G

$$\frac{d}{dt}\left(\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}[I_G]\{\Omega\}\right)+m(G-G)\wedge\vec{a}_G=\vec{M}_G \quad \Rightarrow J_{z_O}\dot{\Omega}=-\frac{X_A L}{2} \quad (II)$$

Relação cinemática para a barra $\vec{a}_G=\vec{a}_A+\dot{\vec{\Omega}}\wedge(G-A)+\vec{\Omega}\wedge\left[\vec{\Omega}\wedge(G-A)\right]$

como $\vec{\Omega}=\vec{0}$, tem-se $\vec{a}_G=\dot{\omega}R\,\vec{j}-\frac{\dot{\Omega}L}{2}\vec{i}$

Teorema do movimento do baricentro para a barra

$$\begin{cases} X_A=m\dfrac{\dot{\Omega}L}{2} \quad (III) \\ Y_A-mg=m\dot{\omega}R \end{cases}$$

das Equações (II) e (III), tem-se $\boxed{\dot{\vec{\Omega}}=\vec{0}}$