ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231 CEP 05508-970, São Paulo, SP
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

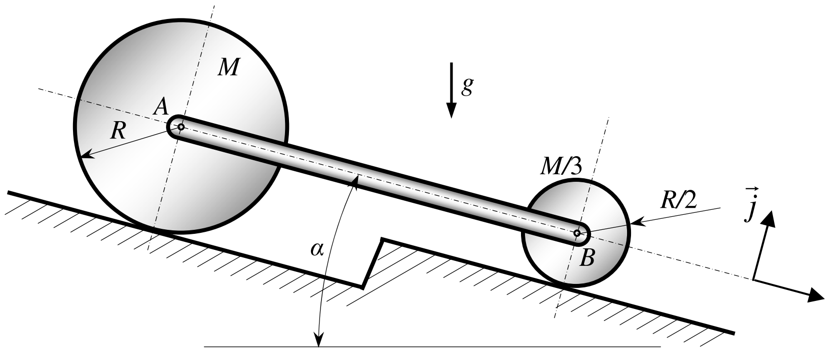
Departamento de Engenharia Mecânica

PME 2100 – MECÂNICA A – Terceira Prova – 22 de novembro de 2011

Duração da Prova: 110 minutos

Não é permitido o uso de aparelhos eletrônicos

QUESTÃO 1 (3,5 pontos): Os discos homogêneos de centros A e B têm, respectivamente, massas M e $M/3$ e raios R e $R/2$, estando ligados por uma barra rígida de massa desprezível. Sabendo que os discos rolam sem escorregar, partindo do repouso, pede-se:



0,5 a) As relações entre os vetores de rotação $\vec{\omega}_A$ e $\vec{\omega}_B$ dos discos e as velocidades $\vec{v}_A$ e $\vec{v}_B$ dos centros dos discos.

1,0 b) A aceleração do ponto B.

1,0 c) A força de atrito entre o disco de centro B e o plano inclinado.

1,0 d) A força na barra indicando se é de tração ou de compressão.

$$J_{G\text{disco}} = \frac{M_{\text{disco}} R_{\text{disco}}^2}{2}$$

QUESTÃO 2 (3,5 pontos): A barra homogênea AB, de comprimento L e massa M, parte do repouso em $\theta = \theta_0$; nessa posição inicial a mola linear de constante elástica k está indeformada, isto é, o seu comprimento natural é $L\text{sen}\theta_0$. Os roletes em A e B tem massa desprezível e atrito nulo. As extremidades da mola estão nos pontos D (fixo) e B. Pede-se:

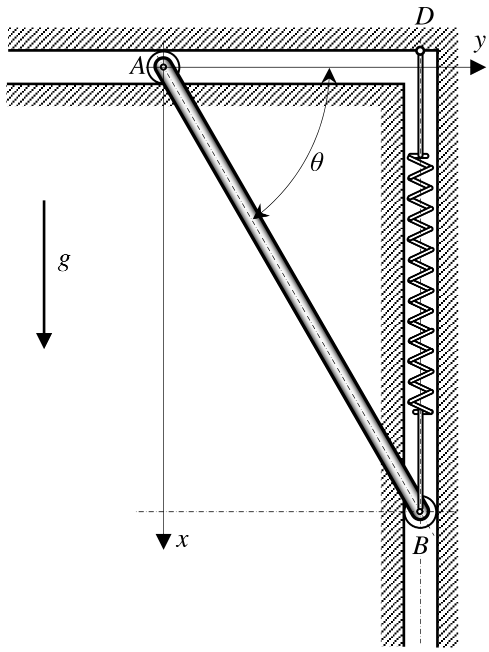
1,0 a) O diagrama de corpo livre da barra correspondente a $\theta_0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

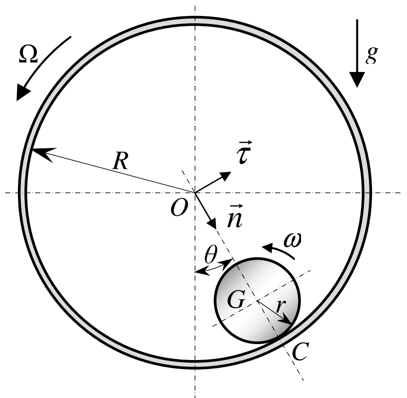
1,0 b) A energia cinética da barra em função de seus parâmetros e $\dot{\theta}$.

1,0 c) A expressão de $\dot{\theta}$ em função de θ.

0,5 d) A relação entre os dados do problema para que o rolete em A não colida com a parede vertical.

$$J_{G\text{barra}} = \frac{M_{\text{barra}} L_{\text{barra}}^2}{12}$$





QUESTÃO 3 (3,0 pontos): Um cilindro de revolução, oco, de raio interno R, pode girar livremente em torno do seu eixo, mantido fixo na horizontal. Outro cilindro, homogêneo, de raio r e peso mg, está apoiado no interior do cilindro oco, e rola sem escorregar. O cilindro oco possui uma aceleração angular $\dot{\Omega}$ conhecida e constante.

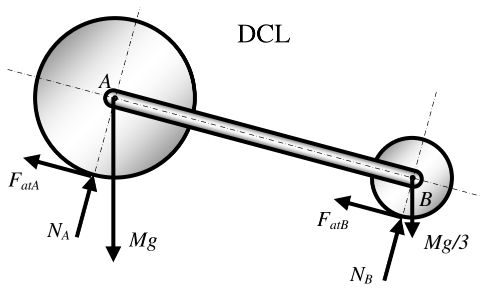
a) Desenhe o diagrama de corpo livre do cilindro menor. 0,5

b) Determine a relação entre $\dot{\omega}$ e $\dot{\Omega}$ supondo θ constante. 0,5

c) Determine o ângulo θ tal que $\dot{\theta}(t) = 0$ e $\ddot{\theta}(t) = 0$. 2,0

PME 2100 – MECÂNICA A – Terceira Prova – 2011 – GABARITO

QUESTÃO 1 (3,5 pontos)



(a) Barra AB em translação: $\boxed{\vec{v}_A = \vec{v}_B = v\vec{i}}$

Não há escorregamento: $\boxed{\vec{\omega}_A = -\frac{v}{R}\vec{k}}$ e $\boxed{\vec{\omega}_B = -\frac{2v}{R}\vec{k}}$

b) TEC: $E - E_0 = W^{ext}$

$$E = \left[\frac{1}{2}Mv_A^2 + \frac{1}{2}J_A\omega_A^2\right] + \left[\frac{1}{2}\frac{M}{3}v_B^2 + \frac{1}{2}J_B\omega_B^2\right]$$

$$J_A = \frac{MR^2}{2} \qquad J_B = \frac{\frac{M}{3}\left(\frac{R}{2}\right)^2}{2} = \frac{MR^2}{24}$$

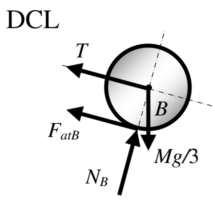
Portanto: $E = \left[\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\frac{MR^2}{2}\left(\frac{v}{R}\right)^2\right] + \left[\frac{1}{2}\frac{M}{3}v^2 + \frac{1}{2}\frac{MR^2}{24}\left(\frac{2v}{R}\right)^2\right] = \frac{1}{2}\left(Mv^2 + \frac{Mv^2}{2} + \frac{Mv^2}{3} + \frac{Mv^2}{6}\right) = Mv^2$

Trabalho das forças externas: as forças normais são perpendiculares ao deslocamento, logo o trabalho é nulo; não há escorregamento, portanto, velocidade nula nos pontos de contato com a rampa, ou seja, trabalho nulo das forças de atrito. Apenas as forças peso realizam trabalho: $W^{ext} = Mgx\text{sen}\alpha + \frac{M}{3}gx\text{sen}\alpha = \frac{4Mg\text{sen}\alpha}{3}x$

Voltando ao TEC:

$$Mv^2 = \frac{4Mg\text{sen}\alpha}{3}x \underset{\text{derivando}}{\Rightarrow} 2Mv\dot{v} = \frac{4Mg\text{sen}\alpha}{3}\dot{x} \Rightarrow 2Mv\dot{v} = \frac{4Mg\text{sen}\alpha}{3}v \Rightarrow \dot{v} = \frac{2g\text{sen}\alpha}{3} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{a}_B = \frac{2g\text{sen}\alpha}{3}\vec{i}}$$



c) TMA (disco de centro B):

$$J_B\dot{\omega}_B\vec{k} = -F_{atB}\frac{R}{2}\vec{k} \Rightarrow \frac{MR^2}{24}\left(-\frac{2}{R}\frac{2g\text{sen}\alpha}{3}\right) = -F_{atB}\frac{R}{2} \Rightarrow F_{atB} = \frac{2}{R}\frac{MR^2}{24}\frac{2}{R}\frac{2g\text{sen}\alpha}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_{atB} = -\frac{1}{9}Mg\text{sen}\alpha\vec{i}}$$

d) TMB (disco de centro B): $\frac{M}{3}\vec{a} = \sum \vec{F}^{ext} \underset{\text{na direção de } x}{\Rightarrow} \frac{M}{3}\frac{2g\text{sen}\alpha}{3} = \frac{M}{3}g\text{sen}\alpha - T - F_{atB}$

$$\Rightarrow \frac{M}{3}\frac{2g\text{sen}\alpha}{3} = \frac{M}{3}g\text{sen}\alpha - T - \frac{1}{9}Mg\text{sen}\alpha \Rightarrow T = -\frac{2}{3}\frac{Mg\text{sen}\alpha}{3} + \frac{Mg\text{sen}\alpha}{3} - \frac{1}{3}\frac{Mg\text{sen}\alpha}{3} \Rightarrow$$

$$\boxed{T = 0}$$

QUESTÃO 1 - Solução alternativa

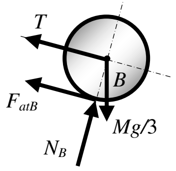
a) Barra AB em translação: $\boxed{\vec{v}_A = \vec{v}_B = v_B\vec{i}}$ $\quad\Rightarrow\quad \vec{a}_A = \vec{a}_B = a_B\vec{i}$

Não há escorregamento: $\boxed{\vec{\omega}_A = -\dfrac{v_B}{R}\vec{k}}$ e $\boxed{\vec{\omega}_B = -\dfrac{2v_B}{R}\vec{k}}$ $\Rightarrow\quad \dot{\vec{\omega}}_A = -\dfrac{a_B}{R}\vec{k}$ e $\dot{\vec{\omega}}_B = -\dfrac{2a_B}{R}\vec{k}$

Itens (b), (c) e (d):

$$J_A = \frac{MR^2}{2} \qquad\qquad J_B = \frac{MR^2}{24}$$

DCL do disco de centro B:



TMA (disco de centro B):

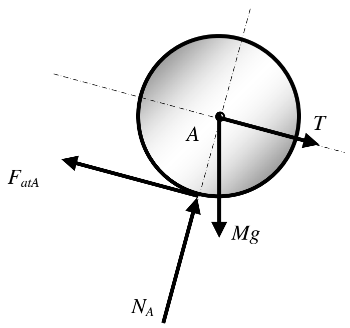
$$J_B\dot{\omega}_B\vec{k} = -F_{atB}\frac{R}{2}\vec{k} \Rightarrow \frac{MR^2}{24}\left(-\frac{2a_B}{R}\right) = -F_{atB}\frac{R}{2} \Rightarrow F_{atB} = \frac{MR^2}{24}\frac{4a_B}{R^2} \Rightarrow F_{atB} = \frac{Ma_B}{6}$$

TMB (disco de centro B):

$$\frac{M}{3}\vec{a}_B = \sum \vec{F}^{ext} \underset{\text{na direção de } x}{\Rightarrow} \frac{M}{3}a_B = \frac{M}{3}g\text{sen}\alpha - T - F_{atB} \Rightarrow \frac{M}{3}a_B = \frac{M}{3}g\text{sen}\alpha - T - \frac{Ma_B}{6}$$

$$\Rightarrow T = \frac{M}{3}g\text{sen}\alpha - \frac{M}{6}a_B - \frac{M}{3}a_B \Rightarrow T = M\left(\frac{g\text{sen}\alpha}{3} - \frac{a_B}{2}\right)$$

DCL do disco de centro A:



TMA (disco de centro A):

$$J_A\dot{\omega}_A\vec{k} = -F_{atA}R\vec{k} \Rightarrow \frac{MR^2}{2}\left(-\frac{a_B}{R}\right) = -F_{atA}R \Rightarrow F_{atA} = \frac{Ma_B}{2}$$

TMB (disco de centro A):

$$\frac{M}{3}\vec{a}_A = \sum \vec{F}^{ext} \underset{\text{na direção de } x}{\Rightarrow} Ma_B = Mg\text{sen}\alpha + T - F_{atA} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Ma_B = Mg\text{sen}\alpha + M\left(\frac{g\text{sen}\alpha}{3} - \frac{a_B}{2}\right) - \frac{Ma_B}{2} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_B = \frac{2g\text{sen}\alpha}{3}\vec{i}}$$

Resultando em:

$$F_{atB} = \frac{Ma_B}{6} \Rightarrow \boxed{F_{atB} = -\frac{Mg\text{sen}\alpha}{9}\vec{i}}$$

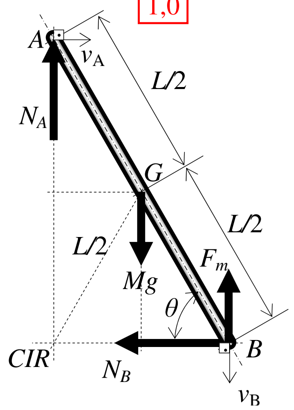
e

$$T = M\left(\frac{g\text{sen}\alpha}{3} - \frac{2g\text{sen}\alpha}{3\cdot 2}\right) \Rightarrow \boxed{T = 0}$$

QUESTÃO 2 (3,5 pontos)

a) DCL

1,0



b) $E=\left[\frac{1}{2}Mv_G^2+\frac{1}{2}J_G\omega^2\right]$ 0,5

Usando o CIR: $v_G=\frac{L}{2}\omega$ 0,5

E como $\omega=\dot{\theta}$:

$$E=\left[\frac{1}{2}M\left(\frac{L}{2}\dot{\theta}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{ML^2}{12}\dot{\theta}^2\right]=\left[\frac{1}{2}\frac{3}{3}\frac{ML^2}{4}\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}\frac{ML^2}{12}\dot{\theta}^2\right]\Rightarrow \boxed{E=\frac{ML^2}{6}\dot{\theta}^2}$$

c) Como não há atrito e as forças normais são perpendiculares ao deslocamento, apenas a força peso e a força da mola realizam trabalho. Usando o TEC, partindo do repouso: 0,5 0,5

$$E-E_0=W^{ext}\Rightarrow \frac{ML^2}{6}\dot{\theta}^2=Mg\frac{L}{2}(\operatorname{sen}\theta-\operatorname{sen}\theta_0)-\frac{k}{2}L^2(\operatorname{sen}\theta-\operatorname{sen}\theta_0)^2\Rightarrow$$

$$\boxed{\dot{\theta}=\sqrt{\frac{3}{ML}(\operatorname{sen}\theta-\operatorname{sen}\theta_0)[Mg-kL(\operatorname{sen}\theta-\operatorname{sen}\theta_0)]}}$$

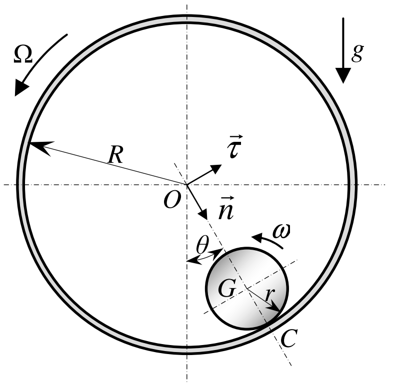
d) Para que a condição seja satisfeita, no limite para $\theta=\pi/2$, devemos ter $\dot{\theta}=0$:

$$\dot{\theta}=0\Rightarrow Mg-kL\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}-\operatorname{sen}\theta_0\right)=0$$

0,5

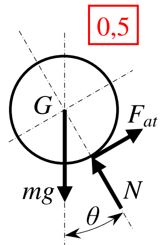
Portanto: $\boxed{\frac{Mg}{kL}\leq(1-\operatorname{sen}\theta_0)}$

QUESTÃO 3 (3,0 pontos)



a) DCL

0,5



b) Aceleração tangencial do ponto C do cilindro menor, considerando θ constante, o que implica em aceleração tangencial de G nula ($a_{G\tau}=0$):

$a_{C\tau}=\dot{\omega}r$

Aceleração tangencial do ponto C do cilindro oco:

$a_{C1\tau}=\dot{\Omega}R$

Como não há escorregamento:

$a_{C\tau}=a_{C1\tau}\Rightarrow \quad \dot{\omega}r=\dot{\Omega}R \quad\Rightarrow\quad \dot{\omega}=\frac{R}{r}\dot{\Omega}$ 0,5

c) TMA (pólo no baricentro) 1,0

$$J_{Gz}\dot{\omega}=F_{at}\,r\Rightarrow\frac{mr^2}{2}\dot{\omega}=F_{at}\,r\Rightarrow\frac{mr^2}{2}\frac{R}{r}\dot{\Omega}=F_{at}\,r\Rightarrow F_{at}=\frac{mR}{2}\dot{\Omega}$$

TMB na direção tangencial considerando $a_{G\tau}=0$:

$$ma_{G\tau}=F_{at}-mg\operatorname{sen}\theta=0\Rightarrow F_{at}=mg\operatorname{sen}\theta\Rightarrow\frac{mR}{2}\dot{\Omega}=mg\operatorname{sen}\theta \quad\Rightarrow\quad \boxed{\theta=\arcsen\frac{\dot{\Omega}R}{2g}} \quad (\text{se } |\dot{\Omega}R|\leq 2g)$$

0,5 0,5