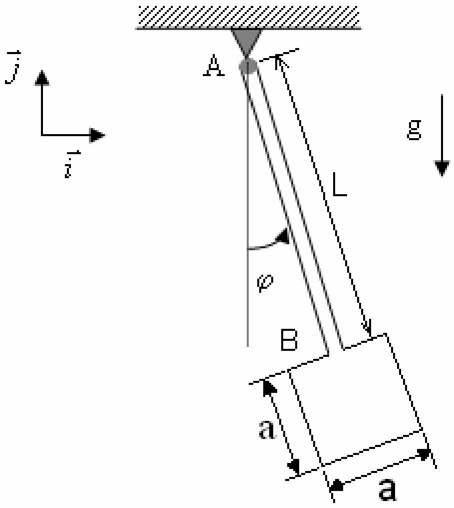
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia Mecânica

PME 2100 – Mecânica Geral A - 3ª Prova 04/12/2007 Duração: 100 min.
(não é permitido o uso de calculadoras)

Q1 - 3,5 Pontos) Considere o pêndulo composto por uma barra AB de massa desprezível e comprimento L e um quadrado de massa m e lado a fixo na barra conforme a figura. Não há atrito na articulação A. São dadas as condições iniciais $\varphi(0) = \varphi_o$ e $\dot{\varphi}(0) = 0$ e o momento de inércia do quadrado em relação a seu baricentro

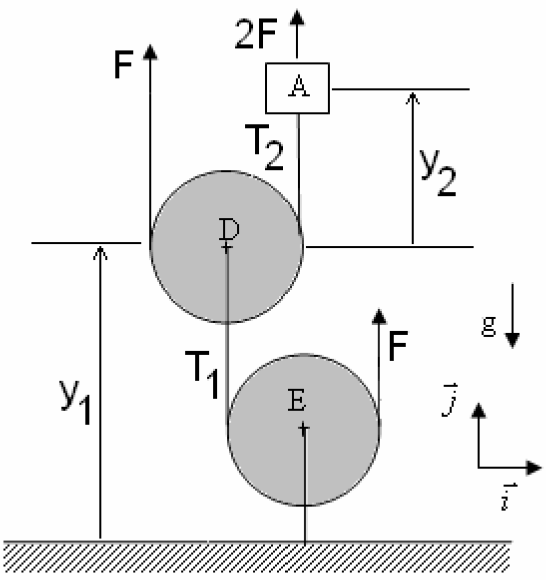
$$J_G = \frac{1}{6} m a^2$$



Pede-se:

a) (1,0) A energia cinética em função de $\dot{\varphi}$;
b) (0,5) O trabalho da força peso correspondente a um deslocamento angular $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_o$, $(\varphi > \varphi_o)$;
c) (1,0) Escrever $\dot{\varphi}$ e $\ddot{\varphi}$ em função de φ, dadas as condições iniciais;
d) (1,0) Determinar as reações vinculares aplicadas à barra no ponto A em função de φ, dadas as condições iniciais.

Q2 - 3 Pontos) Parte de um mecanismo de elevação de carga está sujeito ao campo gravitacional de intensidade g e às forças indicadas na figura, de tal forma que o valor de F é muito superior ao peso do sistema , tornando os fios sempre tracionados. O bloco A possui massa m e as polias possuem massa m e raio R. Os fios são considerados ideais (inextensíveis, com massa desprezível e perfeitamente flexíveis) e conectam o sistema conforme a figura, sem escorregamento nas polias.



Pede-se:

a) (1,0) Os diagramas de corpo livre do bloco A e das polias;
b) (1,5) Aplicando o Teorema do Movimento do Baricentro e/ou o Teorema do Momento Angular ao bloco e polias, expressar as trações T_1 e T_2, como funções das acelerações $\ddot{y}_1$ e $\ddot{y}_2$;
c) (0,5) Manipulando adequadamente as equações, elimine as trações e determine a aceleração do bloco A.

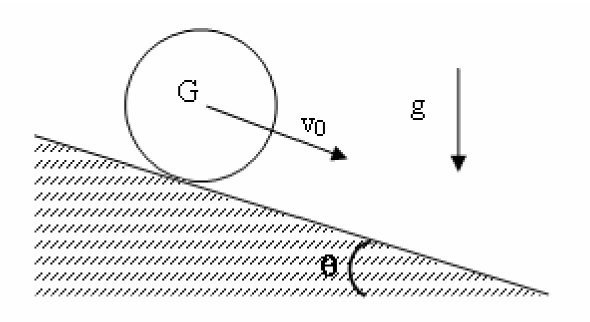
Dado: $J_D = J_E = mR^2/2$

Q3 - 3,5 Pontos) Uma esfera homogênea de massa *m* e raio R é arremessada ao longo da rampa de ângulo θ=30º com uma velocidade inicial v_0 e sem velocidade angular (ω_0=0) no instante do lançamento (t_0=0). Se o coeficiente de atrito cinético é $\mu = \sqrt{3}/3$ determine:

a) A aceleração angular $\dot{\omega}$ da esfera enquanto ocorre escorregamento;
b) A aceleração do baricentro da esfera enquanto ocorre escorregamento;
c) A velocidade $v_G(t)$ do baricentro da esfera enquanto ocorre escorregamento;
d) A velocidade angular $\omega(t)$ da esfera enquanto ocorre escorregamento;
(a,b,c,d somam 2,0)
e) O instante a partir do qual a esfera deixa de escorregar;
f) A velocidade angular nesse instante;
(e,f somam 1,0)
g) (0,5) O trabalho realizado pela força de atrito durante o período de escorregamento;

Nota: recomenda-se simplificar ao máximo as expressões sempre que possível.

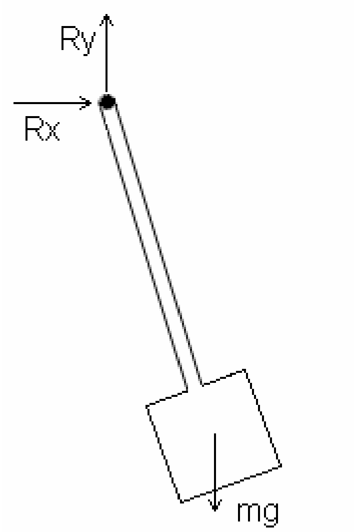
Dado: $J_G = \dfrac{2mR^2}{5}$



Av. Prof. Mello Moraes, 2231 – 05508-900 – São Paulo – SP – BRASIL
TEL.: 55 11 3091-5355/5561/5570 – FAX: 55 11 3813 1886

GABARITO

Q1)



a)Para obtermos a energia cinética do pêndulo composto pela barra AB de massa desprezível e o quadrado de lado *a* e massa *m*, vamos considerar o pólo A. O pêndulo realiza somente um movimento de rotação em relação a este pólo. Então:

$$T = \frac{1}{2}\omega^2 J_{zA}$$

onde ω é o módulo do vetor de rotação

$$\vec{\omega} = \omega\vec{k} = \dot{\varphi}\vec{k}$$

e J_{zA} é o momento de inércia em relação ao pólo A. Pelo teorema de Steiner temos que:

$$J_{zA} = m(L + a/2)^2 + \frac{1}{6}ma^2$$

A expressão para a energia cinética assume a forma

$$T = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 m[(L + a/2)^2 + \frac{1}{6}a^2] \qquad (1)$$

Av. Prof. Mello Moraes, 2231 – 05508-900 – São Paulo – SP – BRASIL
TEL.: 55 11 3091-5355/5561/5570 – FAX: 55 11 3813 1886

b) O trabalho da força peso para o deslocamento angular $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0$ é dado por

$$W = \int_0^t (-mg\vec{j}).\vec{V}_G dt$$

onde $\vec{V}_G$ é a velocidade do baricentro do quadrado de lado *a* e é obtida aplicando-se Poisson em relação ao ponto A.

$$\vec{V}_G = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times (G - A)$$

Como $\vec{V}_A = \vec{0}$ e $(G - A) = (L + a/2)(\sin\varphi\,\vec{i} - \cos\varphi\,\vec{j})$, temos que:

$$\vec{V}_G = \dot{\varphi}(L + a/2)[\sin\varphi\,\vec{j} + \cos\varphi\,\vec{i}] \tag{2}$$

Então a expressão para o trabalho da força peso assume a forma:

$$W = -mg(L + a/2)\int_0^t \sin\varphi\dot{\varphi}dt$$

Uma vez avaliado o integral na equação acima temos:

$$W = mg(L + a/2)(\cos\varphi - \cos\varphi_0) \tag{3}$$

c) De acordo com o teorema da energia cinética temos que:

$$T(t) - T(0) = W \tag{4}$$

De acordo com (1) e com as condições iniciais $\varphi(0) = \varphi_0$ e $\dot{\varphi}(0) = 0$, a energia cinética no instante *t=0* é *T(0)=0*. Então, a partir de (1) e (3) podemos reescrever (4) como:

$$\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 m[(L + a/2)^2 + \frac{1}{6}a^2] = mg(L + a/2)[\cos\varphi - \cos\varphi_0]$$

Resolvendo a equação acima para $\dot{\varphi}$ temos que:

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2g(L + a/2)[\cos\varphi - \cos\varphi_o]}{(L + a/2)^2 + a^2/6} \tag{5}$$

Derivando a equação acima em relação ao tempo temos que:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g(L + a/2)\sin\varphi}{(L + a/2)^2 + a^2/6} \tag{6}$$

d) Para determinarmos as reações vinculares aplicadas à barra no ponto A, vamos utilizar o teorema da resultante.

$$m\vec{a}_G = R_y\vec{j} + \mathrm{R}_x\vec{i} - mg\vec{j} \tag{7}$$

onde $\vec{a}_G$ é a aceleração do baricentro do bloco de lado a, e R_x e R_y são, respectivamente, o módulo da componente horizontal e vertical das reações vinculares. Derivando (2) em relação ao tempo temos que:

$$\vec{a}_G = \ddot{\varphi}(L + a/2)[\sin\varphi\vec{j} + \cos\varphi\vec{i}\,] + \dot{\varphi}^2(L + a/2)[\cos\varphi\vec{j} - \sin\varphi\vec{i}\,]$$

Então, a equação (7) na direção do versor $\vec{i}$ é dada por:

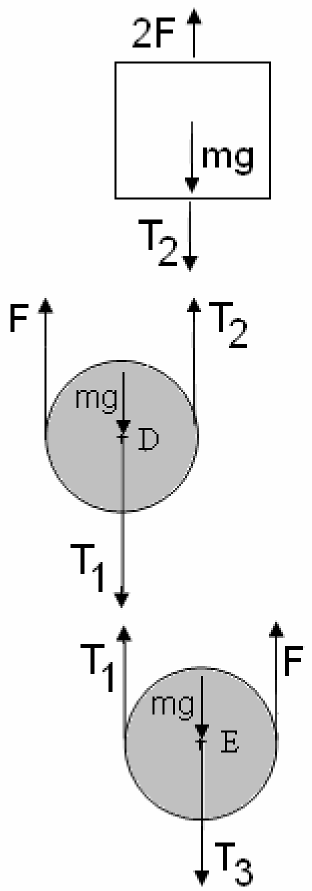
$$R_x = m(L + a/2)[\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi], \tag{8}$$

e na direção do versor $\vec{j}$ é dada por:

$$R_y = m(L + a/2)[\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi] + mg \tag{9}$$

Q2)

a) Diagramas de corpo livre das polias e do bloco:



b)

Bloco:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{TMB} & m\vec{a}_A = (2F - mg - T_2)\vec{j} \\ \text{Cinem.} & \vec{a}_A = (\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2)\vec{j}\end{array}\right\} m(\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2) = (2F - mg - T_2)$$

Polia D:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{TMB} & m\vec{a}_D = (F + T_2 - mg - T_1)\vec{j} \\ \text{Cinem.} & \vec{a}_D = \ddot{y}_1\vec{j}\end{array}\right\} m\ddot{y}_1 = (F + T_2 - mg - T_1)$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{TMA} & (\mathrm{T}_2 - F)R\vec{k} = J_D\dot{\omega}_D\vec{k} \\ \text{Cinem.} & \ddot{y}_2\vec{j} = \dot{\omega}_D R\vec{j}\end{array}\right\} (\mathrm{T}_2 - F)R = J_D\,\frac{\ddot{y}_2}{R}$$

Polia E:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{TMB} & m\vec{a}_E = (F + T_1 - mg - T_3)\vec{j} \\ \text{Cinem.} & \vec{a}_E = \vec{0}\end{array}\right\} F - T_3 - mg + T_1 = 0$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{TMA} & (F - \mathrm{T}_1)R\vec{k} = J_E \dot{\omega}_E \vec{k} \\ \text{Cinem.} & \ddot{y}_1 \vec{j} = -\dot{\omega}_E R\vec{j}\end{array}\right\} (F - \mathrm{T}_1)R = -J_E \frac{\ddot{y}_1}{R}$$

c) É necessário resolver o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} m(\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2) = 2F - mg - T_2 \\ m\ddot{y}_1 = F + T_2 - mg - T_1 \\ J\dfrac{\ddot{y}_2}{R} = (T_2 - F)R \\ J\dfrac{\ddot{y}_1}{R} = (T_1 - F)R \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, resulta em:

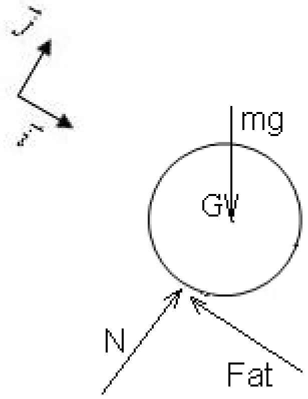
$$\ddot{y}_1 = \frac{8}{11}\left(\frac{F}{m} - g\right)$$

e

$$\ddot{y}_2 = \frac{2}{11}\left(\frac{F}{m} - g\right)$$

Sendo $\vec{a}_A = (\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2)\vec{j} = \dfrac{10}{11}\left(\dfrac{F}{m} - g\right)\vec{j}$

Q3)



a) Escrevendo o Teorema do Momento Angular (TMA), para um corpo rígido, com a matriz de inércia escrita em relação a um referencial solidário ao corpo e , portanto constante, tem-se:

$$M(G-O)\wedge\vec{a}_o+[\vec{\omega}\wedge\vec{i},\vec{\omega}\wedge\vec{j},\vec{\omega}\wedge\vec{k}][J_o]\{\omega\}+[\vec{i},\vec{j},\vec{k}][J_o]\{\dot{\omega}\}=\vec{M}_O^{ext}$$

Simplificando a expressão para movimento plano ($\vec{\omega}=\omega\vec{k}$), tomando o pólo G, sendo o corpo rígido em questão uma esfera (produtos de inércia em relação ao baricentro são nulos), chega-se em:

$$J_{G\,z}\dot{\omega}\vec{k}=\vec{M}_G^{ext}$$

$$\frac{2}{5}mR^2\dot{\omega}\vec{k}=-F_{at}\cdot R\vec{k}\Rightarrow F_{at}=-\frac{2}{5}mR\dot{\omega}$$

Aplicando o Teorema do Movimento do Baricentro (TMB) para a esfera e já efetuando os cálculos para o ângulo de 30º do plano inclinado e, adotando que sua aceleração ocorrerá apenas na direção $\vec{i}$:

$$mg\sin(\theta)\vec{i}-mg\cos(\theta)\vec{j}-F_{at}\vec{i}+N\vec{j}=m\vec{a}_G\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{2}mg-F_{at}=ma_G\\ N=\dfrac{\sqrt{3}}{2}mg\end{cases}$$

Da Lei de Coulomb, segue que, para atrito cinético:

$$F_{at} = \mu N = \frac{1}{2}mg$$

Substituindo a magnitude da força de atrito na expressão do TMA, chega-se no valor da intensidade da aceleração angular da esfera:

$$\dot{\omega} = -\frac{5}{4}\frac{g}{R}$$

b) Substituindo o valor da força de atrito na expressão do TMB em $\vec{i}$, chega-se em:

$$a_G = 0$$

c) Integrando no tempo a expressão da aceleração do baricentro G da esfera, e utilizando as condições iniciais, tem-se:

$$V_G(t) - V_0 = \int_0^t a_G d\tau = \int_0^t 0 d\tau = 0 \Rightarrow V_G(t) = V_0$$

d) Integrando no tempo a expressão da aceleração angular da esfera, e utilizando as condições iniciais, tem-se:

$$\omega(t) - \omega_0 = \int_0^t \dot{\omega} d\tau = \int_0^t \left(-\frac{5}{4}\frac{g}{R}\right) d\tau = -\frac{5}{4}\frac{g}{R}t \Rightarrow \omega(t) = -\frac{5}{4}\frac{g}{R}t$$

e) O instante à partir do qual a esfera pára de escorregar ocorre quando a velocidade no ponto de contato entre a esfera e o plano inclinado, denominado C, se torna nula.
Aplicando a equação de Poisson entre o ponto G e o ponto C e impondo que a velocidade em C seja o vetor identicamente nulo, tem-se:

$$\vec{V}_C = \vec{V}_G + \vec{\omega} \wedge (C - G)$$

$$\vec{0} = V_o\vec{i} - \frac{5}{4}\frac{g}{R}\bar{t}\vec{k} \wedge (-R\vec{j})$$

$$\bar{t} = \frac{4}{5}\frac{V_o}{g}$$

f) Substituindo o valor do instante determinado no item anterior na expressão da velocidade angular em função do tempo, tem-se:

$$\omega(\bar{t}) = -\frac{V_o}{R}$$

g) Aplicando o Teorema da Energia Cinética (TEC) entre os instantes zero e $\bar{t}$, tem-se:

$$\bar{T} - T_o = \tau_{mg} + \tau_{Fat}$$

$$T_o = \frac{1}{2} m V_o{}^2$$

$$\bar{T} = \frac{1}{2} m V_o{}^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5} m R^2 \frac{V_o{}^2}{R^2} = \frac{1}{2} m V_o{}^2 + \frac{1}{5} m V_o{}^2$$

$$\tau_{mg} = mgV_o\bar{t}\sin(\theta) = \frac{2}{5} m V_o{}^2$$

Note que somente a força peso e a força de atrito realizam trabalho para a situação proposta. Isolando o trabalho da força de atrito na expressão do TEC, obtém-se:

$$\tau_{Fat} = \bar{T} - T_o - \tau_{mg} = -\frac{1}{5} m V_o{}^2$$