ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

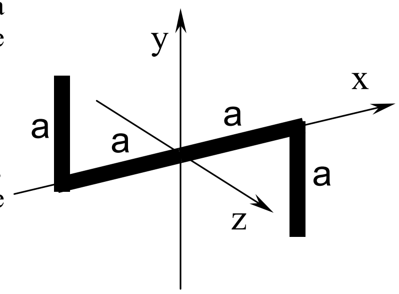
Departamento de Engenharia Mecânica

PME 2100 – MECÂNICA A – Terceira Prova – 08 de dezembro de 2006

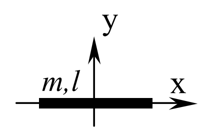
Duração da Prova: 100 minutos (não é permitido o uso de calculadoras)

1ª Questão (3,0 pontos) O sistema mostrado na figura encontra-se no plano *xy* e é composto por quatro barras de comprimento *a* e densidade linear ρ. Pedem-se:

a) a massa do sistema e as coordenadas do seu baricentro;
b) o momento de inércia do sistema em relação ao eixo *z*;
c) o produto de inércia do sistema em relação aos eixos *x* e *z*;
d) o produto de inércia do sistema em relação aos eixos *x* e *y*.



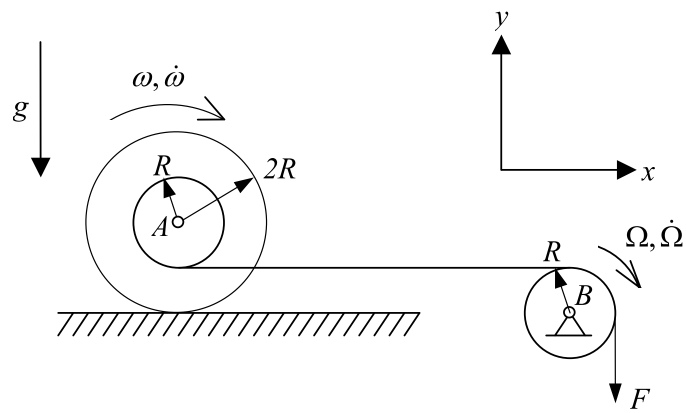
Dado:



$$J_z = \frac{ml^2}{12}$$

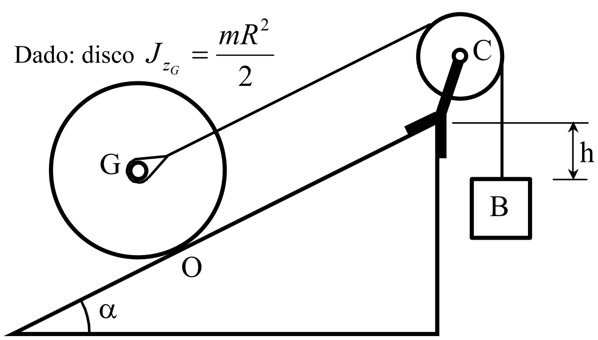
2ª Questão (3,5 pontos) O sistema esquematizado na figura é composto por dois corpos rígidos e um fio ideal que se encontram em um plano vertical. O primeiro corpo é formado por duas polias solidárias, de centro *A*, massa $3m$ e momento de inércia $J_{Az} = 3mR^2$. O segundo corpo é uma polia de centro *B*, massa *m* e momento de inércia $J_{Bz} = \frac{1}{2}mR^2$. Sabendo que uma força *F* constante é aplicada ao fio e que não há escorregamento entre o fio e as polias e nem entre a polia de centro *A* e o plano horizontal, pedem-se:

a) os diagramas de corpo livre dos dois corpos;
b) a força de tração *Q* no fio, entre as polias, supondo conhecida a aceleração angular $\dot{\Omega}$ da polia de centro *B*;
c) a relação entre as acelerações angulares $\dot{\omega}$ e $\dot{\Omega}$ dos dois corpos;
d) a aceleração do ponto *A*, supondo conhecida a aceleração angular $\dot{\Omega}$ da polia de centro *B*;
e) as acelerações angulares $\dot{\omega}$ e $\dot{\Omega}$ e as componentes normal e tangencial da reação do solo sobre o corpo de centro *A*.



3ª Questão (3,5 pontos) Um disco de massa *m*, raio *R* e centro *G* rola sem escorregar em um plano inclinado, como indicado na figura. O disco é tracionado por um fio inextensível, de massa desprezível, que está conectado a um corpo *B* de massa *m*. No instante inicial, o sistema está em repouso e *h = 0*. Sabendo que a polia com centro *C* tem massa desprezível, pedem-se:

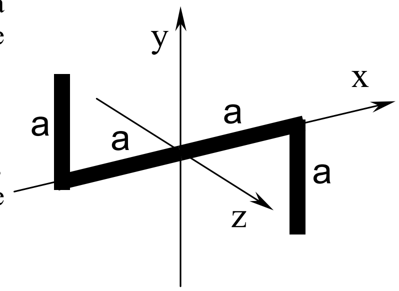
a) a energia cinética do sistema;
b) a velocidade v_B e a aceleração a_B do bloco em função de *h*;
c) a tração *T* no fio e as componentes normal e tangencial da força de contato no disco.



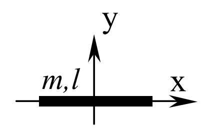
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

1ª Questão (3,0 pontos) O sistema mostrado na figura encontra-se no plano *xy* e é composto por quatro barras de comprimento *a* e densidade linear ρ. Pedem-se:
a) a massa do sistema e as coordenadas do seu baricentro;
b) o momento de inércia do sistema em relação ao eixo *z*;
c) o produto de inércia do sistema em relação aos eixos *x* e *z*;
d) o produto de inércia do sistema em relação aos eixos *x* e *y*.



Dado:



$$J_z = \frac{ml^2}{12}$$

$\boxed{m = 4a\rho}$ 0,5

$\boxed{G = (\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ )}$ 0,5

$$J_z = \frac{2a\rho(2a)^2}{12} + 2\left\{\frac{a\rho(a)^2}{12} + a\rho\left(a^2 + \frac{a^2}{4}\right)\right\} = \frac{2\rho a^3}{3} + \rho a^3\left(\frac{1}{6} + \frac{10}{4}\right) = \frac{2\rho a^3}{3} + \frac{8\rho a^3}{3}$$

0,5

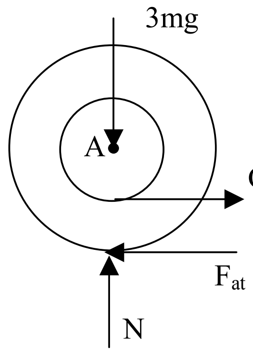
$\boxed{J_z = \frac{10\rho a^3}{3}}$ 0,5

$\boxed{J_{xz} = 0}$ (figura no plano xy) 0,5

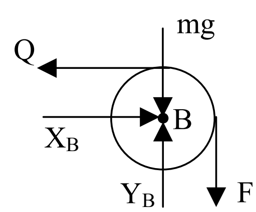
$$J_{xy} = \left\{0 + a\rho(-a)\left(\frac{a}{2}\right)\right\} + \left\{0 + a\rho(a)\left(-\frac{a}{2}\right)\right\}$$

$\boxed{J_{xy} = -\rho a^3}$ 0,5

2ª Questão (3,5 pontos)



0,5



TMA na polia de centro B:

$$\dot{\vec{H}}_B = \vec{M}_B^{ext} \Rightarrow -J_{Bz}\dot{\Omega}\vec{k} = (Q-F)R\vec{k} \Rightarrow \boxed{Q = F - \frac{mR\dot{\Omega}}{2}}$$ 0,5

Não havendo escorregamento entre o fio e as polias e entre a polia de centro A e o plano e sendo o fio ideal, da cinemática:

$$\vec{v}_{fio} = \omega R\vec{i} = \Omega R\vec{i} \Rightarrow \omega = \Omega \Rightarrow \boxed{\dot{\omega} = \dot{\Omega}}$$ 0,5

Aceleração do ponto A supondo conhecida a aceleração angular $\dot{\Omega}$: $\boxed{\vec{a}_A = 2\dot{\omega}R\vec{i} = 2\dot{\Omega}R\vec{i}}$ 0,5

TMA na polia de centro A:

$$\dot{\vec{H}}_A = \vec{M}_A^{ext} \Rightarrow -J_{Az}\dot{\omega}\vec{k} = (Q-2F_{at})R\vec{k} \Rightarrow -3mR\dot{\omega} = Q - 2F_{at}$$ 0,5

TMB na polia de centro A:

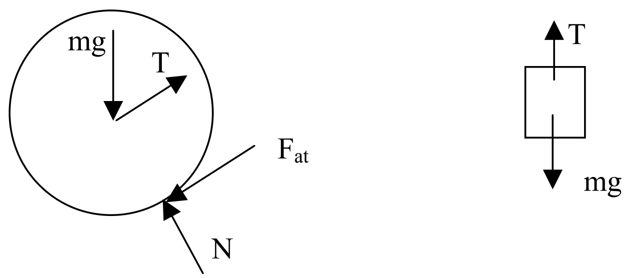
$$3m(2\dot{\omega}R)\vec{i} = (Q-F_{at})\vec{i} + (N-3mg)\vec{j} \Rightarrow \begin{cases} 6mR\dot{\omega} = Q - F_{at} \\ N = 3mg \end{cases}$$ 0,5

Resolvendo: $\boxed{\dot{\omega} = \dot{\Omega} = \frac{2F}{31mR}}$ $\boxed{F_{at} = \frac{18F}{31}}$ $\boxed{N = 3mg}$ 0,5

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

3ª Questão (3,5 pontos)



Sendo o fio inextensível, a velocidade do baricentro do disco é a mesma velocidade do bloco ($v_G = v_B$).

$$E_{cin} = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\left(\frac{v_B}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}mv_B^2 \Rightarrow \boxed{E_{cin} = \frac{5}{4}mv_B^2}$$

1,0

TEC no sistema: $\Delta E_{cin} = W$

0,5

$$\frac{5}{4}mv_B^2 = mgh - mghsen\alpha \Rightarrow \boxed{v_B^2 = \frac{4gh}{5}(1 - sen\alpha)}$$

0,5

derivando em relação ao tempo:

$$2v_Ba_B = \frac{4gv_B}{5}(1 - sen\alpha) \Rightarrow \boxed{a_B = \frac{2g}{5}(1 - sen\alpha)}$$

0,5

TMB no disco:

$$m\frac{2g}{5}(1 - sen\alpha)\vec{i} = (T - F_{at} - mgsen\alpha)\vec{i} + (N - mg\cos\alpha)\vec{j}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T = F_{at} + \dfrac{mg}{5}(2 + 3sen\alpha) \\ N = mg\cos\alpha \end{cases}$$

0,5

TMA no disco: $\dot{\vec{H}}_G = \vec{M}_G$

$$-\frac{mR^2}{2}\dot{\omega}\vec{k} = -F_{at}R\vec{k} \quad \text{sendo que} \quad \omega = \frac{v_B}{R} \Rightarrow \dot{\omega} = \frac{a_B}{R} = \frac{2g}{5R}(1 - sen\alpha)$$

Resolvendo: $\boxed{F_{at} = \frac{mg}{5}(1 - sen\alpha)}$ $\boxed{T = \frac{mg}{5}(3 + 2sen\alpha)}$ $\boxed{N = mg\cos\alpha}$

0,5

<u>Ou TMB no Bloco:</u> $ma_B = mg - T$