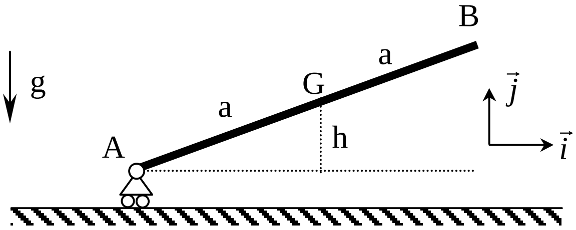
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5355 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

PME2100 – Mecânica A
Terceira Prova – 29 de Novembro de 2005 – Duração: 100 minutos
GABARITO

1ª Questão (3,0 pontos). No instante inicial a barra **AB** homogênea, de massa **m** e comprimento **2a**, encontra-se na posição vertical e em repouso. Devido a uma pequena perturbação, a barra cai deslizando sua extremidade **A** sobre um plano. Pede-se:

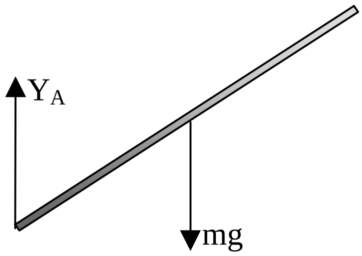


Dado: Momento de inércia baricêntrico da barra **AB**: $J_{GZ} = {mL^2}/{12}$

(a) Justificar que o movimento do baricentro **G** é na vertical.
(b) A relação entre a velocidade angular ω da barra e a velocidade do baricentro $\mathbf{v_G}$.
(c) O trabalho τ das forças atuantes na barra em função da altura h.
(d) A energia cinética da barra em função da altura h.
(e) A velocidade do baricentro $\mathbf{v_G}$ em função da altura h.

Solução

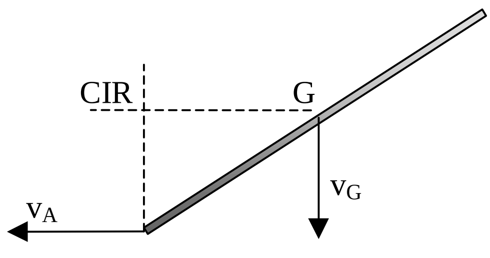
a) dcl da barra:



$$m\vec{a}_G = (Y_A - mg)\vec{j} \rightarrow \vec{a}_G.\vec{i} = 0 \rightarrow \vec{v}_G.\vec{i} = cte = 0\,(\textit{parte do repouso})$$

$\therefore x_G$ é constante. (0,5)

b) CIR da barra:



$$\vec{v}_G = \omega\left(-\vec{k}\right)\wedge\left(G - CIR\right)$$
$$\vec{v}_G = -\omega\left(a^2 - h^2\right)^{1/2}\vec{j}$$
$$v_G{}^2 = \omega^2\left(a^2 - h^2\right)$$

(0,5)

c) $\tau = mg(a - h)$ (0,5)

d) $T = \dfrac{1}{2}mv_G^2 + \dfrac{1}{2}J_{zG}\omega^2;\; J_{zG} = \dfrac{m4a^2}{12};\; \therefore T = \dfrac{mv_G^2\left(4a^2 - 3h^2\right)}{6\left(a^2 - h^2\right)}$ (1,0)

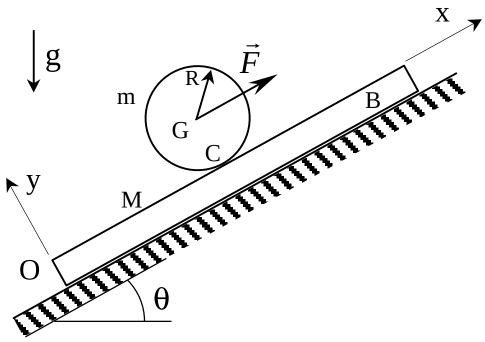
e) TEC: $mg(a - h) = \dfrac{mv_G^2\left(4a^2 - 3h^2\right)}{6\left(a^2 - h^2\right)} \rightarrow v_G = (a - h)\sqrt{\dfrac{6(a + h)}{\left(4a^2 - 3h^2\right)}}$ (0,5)

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5355 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

2ª Questão (3,5 pontos). Um cilindro homogêneo de massa **m** e raio **R** rola sem escorregar sobre o bloco **B,** de massa **M,** sob a ação de uma força $\vec{F}$ aplicada no ponto **G**. O bloco escorrega sem atrito sobre o plano horizontal. Dado o coeficiente de atrito **μ** entre o cilindro e o bloco, e adotando o sistema de coordenadas (O,x,y,z) solidário ao bloco, pede-se:



Dado: Momento de inércia do disco: $J_{GZ} = mR^2/2$

(a) O diagrama de corpo livre do cilindro e o diagrama de corpo livre do bloco B.

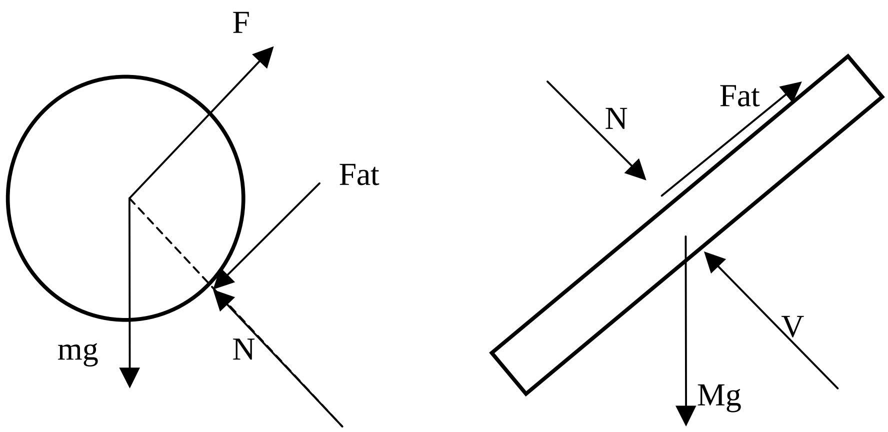
(b) O vetor aceleração $\vec{a}_G$ do baricentro em função da aceleração angular do cilindro $\dot{\omega}$.

(c) O vetor aceleração angular do cilindro $\dot{\vec{\omega}}$, o vetor aceleração do bloco **B** e o vetor aceleração do baricentro.

(d) A máxima força $\vec{F}$ para que não ocorra escorregamento em **C.**

Solução

a) DCLs:



(1,0)

b) $\vec{a}_G = \vec{a}_{G,rel} + \vec{a}_{G,arr} + \vec{a}_{G,Cor}$; $\vec{a}_{G,rel} = \dot{\omega}R\vec{i}$; $\vec{a}_{G,arr} = a_B\vec{i}$; $\vec{a}_{G,Cor} = \vec{0} \rightarrow \vec{a}_G = (a_B + \dot{\omega}R)\vec{i}$

c)TMB disco

$$\begin{cases} m(a_B + \dot{\omega}R) = -mg\sin\theta + F - F_{at} \\ N = mg\cos\theta \end{cases} \qquad (0{,}5)$$

TMB bloco

$$\begin{cases} Ma_B = -Mg\sin\theta + F_{at} \\ V = N + mg\cos\theta \end{cases} \qquad (0{,}5)$$

TMA disco

$$J_{GZ}\dot{\omega} = F_{at}R \qquad (0{,}5)$$

Resolvendo as equações, chega-se a:

$$\dot{\omega} = \frac{2FM}{(m+3M)mR};\ a_B = \frac{F-(m+3M)g\sin\theta}{(m+3M)};\ \vec{a}_G = \frac{F(m+2M)-m(m+3M)g\sin\theta}{(m+3M)m}\vec{i} \qquad (0{,}5)$$

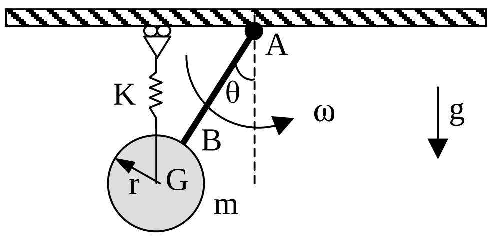
d) $$F_{at} = \frac{FM}{(m+3M)} \le F_{at\,máx} = \mu\, mg\cos\theta \rightarrow F \le \frac{(m+3M)\mu\, mg\cos\theta}{M} \qquad (0{,}5)$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5355 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

3ª Questão (3,5 pontos). O disco de massa **m** e raio **r**, está suspenso pela barra **AB,** de massa desprezível e comprimento **3r,** articulada em **A.** Uma mola de constante elástica **K** é presa ao baricentro **G** do disco. A mola se mantém na direção vertical durante o movimento. No instante inicial $t = 0$, $\theta(0) = \theta_0$, o sistema está em repouso e a mola não está distendida. Pede-se:



Dado: Momento de inércia baricêntrico do disco: $J_{GZ} = mR^2/2$

(a) A energia cinética do sistema em função da velocidade angular ω.
(b) O trabalho das forças externas aplicadas ao sistema, em função da posição angular θ.
(c) O vetor velocidade angular $\vec{\omega}$ do disco.
(d) O vetor aceleração angular $\dot{\vec{\omega}}$ do disco.

Solução

a) $T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}J_{zG}\omega^2;\ J_{zG} = \frac{mr^2}{2};v_G = 4\omega r\left(\cos\theta\,\vec{i} - \sin\theta\,\vec{j}\right) \rightarrow T = \frac{33m\omega^2 r^2}{4}$ (1,0)

b) $\tau = mg4r(\cos\theta - \cos\theta_0) - \frac{K}{2}(4r\cos\theta - 4r\cos\theta_0)^2$ (1,0)

c) TEC:

$$\frac{33m\omega^2 r^2}{4} = mg4r(\cos\theta - \cos\theta_0) - \frac{K}{2}(4r\cos\theta - 4r\cos\theta_0)^2 \rightarrow$$

$$\vec{\omega} = \left[\frac{16g}{33r}(\cos\theta - \cos\theta_0) - \frac{32K}{33m}(\cos\theta - \cos\theta_0)^2\right]^{1/2}\vec{k}$$ (1,0)

d) $\frac{33m\,2\omega\dot{\omega}r^2}{4} = mg4r(-sin\theta)\dot{\theta} - \frac{K}{2}2(4r\cos\theta - 4r\cos\theta_0)(-4rsin\theta)\dot{\theta} \rightarrow$

$$\dot{\omega} = \left[\frac{8g}{33r} - \frac{32K}{33m}(\cos\theta - \cos\theta_0)\right]sin\theta, com\ \dot{\vec{\omega}} = \dot{\omega}\vec{k}$$ (0,5)