ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

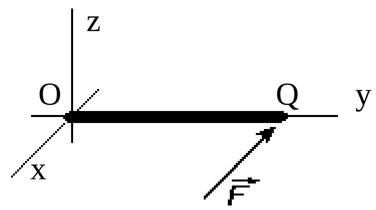
Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 2100 – MECÂNICA A – Terceira Prova – 10 de dezembro de 2004
**Duração: 100 minutos. Não é permitido o uso de calculadoras.**

## 1ª Questão (3,0 pontos)

Uma barra **OQ**, homogênea, de massa $m$ e comprimento $L$**,** encontra-se em repouso, apoiada sobre o plano horizontal **xy**, podendo movimentar-se livremente, sem atrito. Em um determinado instante uma força $\vec{F}(t)$, ortogonal à barra e paralela ao plano, é aplicada no ponto **Q**. Para este instante, correspondente à posição mostrada na figura, pede-se:




(a) determinar o vetor aceleração do baricentro **G** da barra, $\vec{a}_G$;

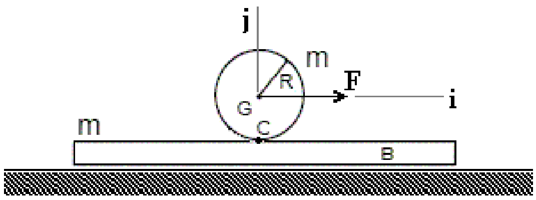
(b) determinar o vetor aceleração angular da barra, $\dot{\vec{\omega}}$;

(c) determinar o ponto **P** da barra para o qual a aceleração é nula no instante considerado.

**Dado: Momento de inércia baricêntrico da barra OQ:** $J_{GZ} = mL^2/12$ **.**

---

## 2ª Questão (3,5 pontos)




Um cilindro homogêneo de massa $m$ e raio $R$ rola sem escorregar sobre o bloco **B,** de massa $m$**,** sob a ação de uma força $\vec{F}$ aplicada em seu baricentro **G**. O bloco escorrega sem atrito sobre o plano horizontal. Pede-se:

(a) fazer o diagrama de corpo livre do cilindro;

(b) fazer o diagrama de corpo livre do bloco B;

(c) o vetor aceleração angular do cilindro $\dot{\vec{\omega}}$, o vetor aceleração do bloco **B,** $\vec{a}_B$ e o vetor aceleração do baricentro, $\vec{a}_G$;

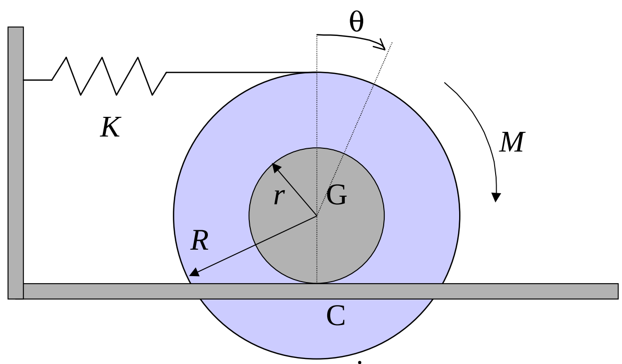
(d) determinar o mínimo valor do coeficiente de atrito $\mu$ para que o cilindro não escorregue em **C.**

**Dado: Momento de inércia baricêntrico do disco:** $J_{GZ} = mR^2/2$ **.**

---

## 3ª Questão (3,5 pontos)

O carretel de massa $m$ e raios $R$ e $r$ rola sem escorregar sobre um plano horizontal, sob a ação de um binário de momento $M$, constante. Um fio ideal, preso em uma mola linear ideal de constante K**,** é enrolado no carretel conforme a figura. Não existe escorregamento entre o fio e o carretel. No instante inicial $t = 0$, quando $\theta(0) = 0$, o carretel está em repouso e a mola não está distendida. Pede-se:




(a) a energia cinética do carretel, expressa em função da velocidade angular $\omega = \dot{\theta}$;

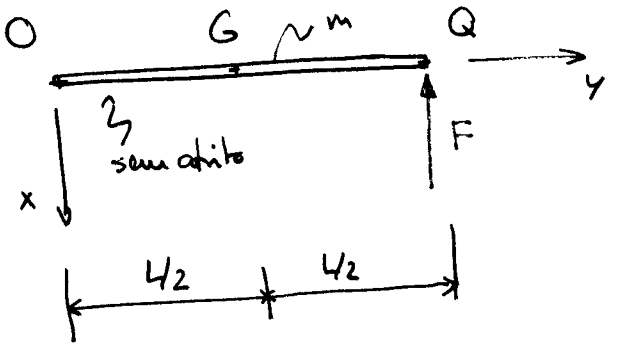
(b) o trabalho das forças e momento externos, aplicados ao carretel, expresso em função da posição angular $\theta$;

(c) a aceleração angular $\dot{\omega}$ do carretel, expressa em função da posição angular $\theta$;

(d) a aceleração do baricentro $a_G$, expressa em função da posição angular $\theta$.

**Dado: Momento de inércia baricêntrico do carretel:** $J_G$ .

1ª Questão
(3,0 pontos)




a) T.M.B. $\qquad m\vec{a}_G = \vec{R} \Rightarrow m(a_{Gx}\vec{i} + a_{Gy}\vec{j}) = -F\vec{i} - mg\vec{k} + N\vec{k}$

1 ponto

logo: $\quad N = mg \quad$ e $\quad a_{Gy} = 0 \quad a_{Gx} = -\frac{F}{m}$

assim: $\quad \boxed{\vec{a}_G = -F/m\,\vec{i}} \quad$ (½ sinal)

b) T.M.A. com polo em G: $\qquad \vec{\omega} = \omega\vec{k}$

1 ponto

$$J_{Gz}\dot{\omega}\vec{k} = \vec{M}_G^{ext} = \frac{F.L}{2}\vec{k}$$

$$\frac{mL^2}{12}\dot{\omega}\vec{k} = \frac{FL}{2}\vec{k} \Rightarrow \dot{\omega} = \frac{6F}{mL} \Rightarrow \boxed{\dot{\vec{\omega}} = +\frac{6F}{mL}\vec{k}}$$

c) Para o sólido: $\qquad \vec{a}_P = \vec{a}_G + \dot{\vec{\omega}}\wedge(P-G) + \vec{\omega}\wedge[\vec{\omega}\wedge(P-G)]$

1 ponto

como p/ $t=0 \Rightarrow \vec{\omega} = \vec{0}$ (em repouso)

$$\vec{a}_P = \vec{a}_G + \dot{\vec{\omega}}\wedge(P-G) = \vec{0} \Rightarrow (P-G)\wedge\dot{\vec{\omega}} = \vec{a}_G$$

tomando $\vec{X} = (P-G) \qquad \vec{X} = \frac{\dot{\vec{\omega}}\wedge\vec{a}_G}{|\dot{\vec{\omega}}|^2} + \lambda\dot{\vec{\omega}} = -\frac{mL}{6F}\frac{F}{m}\vec{j} + \lambda'\vec{k}$

$$\vec{X} = -\frac{L}{6}\vec{j} \Rightarrow P = G - \frac{L}{6}\vec{j} = \frac{L}{2}\vec{j} - \frac{L}{6}\vec{j} = \frac{L}{3}\vec{j}$$

$\therefore \quad \boxed{P = (0, L/3, 0)}$

$$\vec{X} = x\vec{i} + \left(y - \frac{L}{2}\right)\vec{j} + z\vec{k}$$

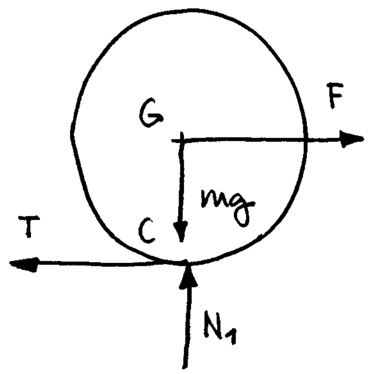
ou:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y-\frac{L}{2} & z \\ 0 & 0 & \frac{6F}{mL} \end{vmatrix} = \left(y-\frac{L}{2}\right)\frac{6F}{mL}\vec{i} - \frac{6F}{mL}x\vec{j} = -\frac{F}{m}\vec{i} \Rightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ y = L/3 \end{matrix}$$

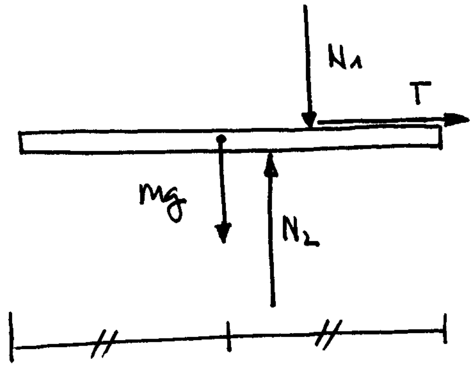
2ª Questão: (3,5 pontos)

a)

1/2 ponto par (a)+(b)




b)

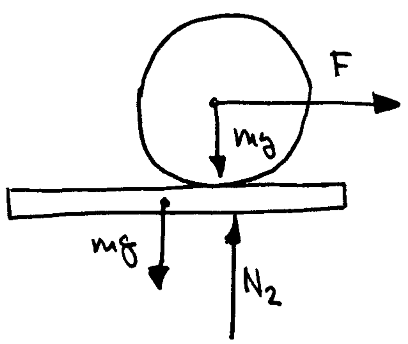



c) sem escorregamento: $\vec{v}_c\big|_{cil.} = \vec{v}_c\big|_{bloco} = \vec{v}_B$ com $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_c = \vec{v}_G + \vec{\omega}\wedge(C-G) \Rightarrow \omega\vec{k}\wedge(-R\vec{j}) = v_B\vec{i} - v_G\vec{i}$$

$$v_B - v_G = \omega R \Rightarrow \omega = (v_B - v_G)/R \;/\!/ \;(1/2)$$

T.M.B. do conjunto: (1,0) ou 1/2 p/ T.M.B. do cilindro e 1/2 p/ T.M.B do bloco.




$N_2 = 2mg \;/\!/$

$$\underbrace{m\ddot{\vec{X}}_G + m\ddot{\vec{X}}_B}_{2m\ddot{\vec{X}}_{baricentro\ conj.}} = F\vec{i} \Rightarrow m(a_G + a_B) = F$$

$$a_G = F/m - a_B$$

(1/2) T.M.A. do cilindro em relação ao polo acelerado C: $J_{Cz} = J_{Gz} + mR^2 = \frac{3}{2}mR$

$$\vec{M}_c = m(G-C)\wedge\vec{a}_c + J_{Cz}\dot{\omega}\vec{k} \Rightarrow -FR\vec{k} = mR\vec{j}\wedge(a_B\vec{i} + a_{cn}\vec{j}) + J_c\dot{\omega}$$

$$-FR\vec{k} = -mRa_B\vec{k} + J_{Cz}\dot{\omega}\vec{k} \qquad \text{mas: } \omega = \frac{v_B - v_G}{R} \Rightarrow \dot{\omega} = \frac{a_B - a_G}{R}$$

e $a_B - a_G = a_B - F/m + a_B = 2a_B - F/m = R\dot{\omega}$

$$-FR = -mRa_B + 3/2\, mR^2\,\frac{(2a_B - F/m)}{R} \Rightarrow -FR = -mRa_B + 3mRa_B - 3/2\, FR$$

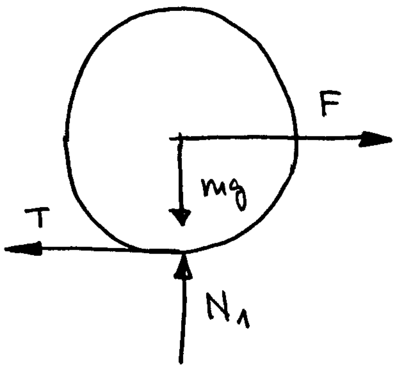
$$2mRa_B = \frac{1}{2}FR \Rightarrow a_B = \frac{1}{4}\frac{F}{m} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_B = +\frac{1}{4}\frac{F}{m}\vec{i}}$$

$$a_G = \frac{F}{m} - a_B = \frac{F}{m} - \frac{1}{4}\frac{F}{m} = \frac{3}{4}\frac{F}{m} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_G = +\frac{3}{4}\frac{F}{m}\vec{i}}$$

$$\dot{\omega} = \frac{a_B - a_G}{R} = -\frac{1}{2}\frac{F}{mR} \Rightarrow \boxed{\dot{\vec{\omega}} = -\frac{1}{2}\frac{F}{mR}\vec{k}}$$

(1/2)

d) T.M.B. do cilindro:
(1/2 ponto)




$N_1 = mg$

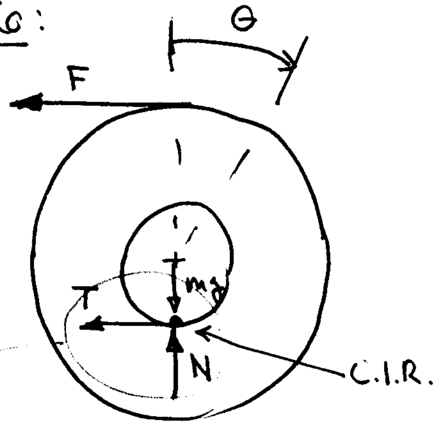
$m a_G = F - T \Rightarrow T = F - m a_G$

$T = F - \frac{3}{4} F \Rightarrow T = \frac{1}{4} F$ //

sem escorregamento: $T \leq \mu N_1$

$\frac{F}{4} \leq \mu m g \Rightarrow \boxed{\mu \geq \frac{F}{4mg}}$

3ª Questão:
(3,5 pontos)




não realizam trabalho.

propagação de erro:

- não desconta quando é erro algébrico simples;
- desconta quando:
  - erro conceitual;
  - dimensões incompatíveis.

(a) $E = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} J_G \omega^2 = \frac{1}{2} J_C \omega^2$ $(1/2)$ $\qquad J_C = J_G + mr^2$

(1 ponto)

$$\boxed{E = \frac{1}{2}(J_G + mr^2)\,\omega^2}$$

sem escorregamento:

$v_G = r\omega$

(b) $W^{ext} = W^{mola} + W^{momento}$

(1 ponto)

deflexão da mola:

$\delta = x + \theta R = (R+r)\theta$

$W^{momento} = +M\theta$ $(1/2)$

e $F = K\delta = K(R+r)\theta$

$$W^{mola} = -\int_0^\theta K(R+r)^2\theta\, d\theta = -\frac{K\delta^2}{2} \quad (1/2)$$

$$W^{ext} = -\frac{K\delta^2}{2} + M\theta \Rightarrow \boxed{W^{ext} = M\theta - \frac{K(R+r)^2}{2}\theta}$$

(c) T.E.C $\quad \Delta E = W^{ext} + \cancel{W^{int}}^{\,0}$

(1 ponto)

$$\frac{1}{2}(J_G + mr^2)\,\omega^2 = M\theta - \frac{K(R+r)^2}{2}\theta^2 \quad (1/2) \qquad c/\ \omega = \dot{\theta}$$

derivando membro-a-membro:

$$(J_G + mr^2)\,\omega\dot{\omega} = M\omega - K(R+r)^2.\theta.\omega$$

$$\boxed{\dot{\omega} = \frac{M - K(R+r)^2\theta}{J_G + mr^2}} \quad (1/2)$$

(d) $v_G = r\omega \Rightarrow a_G = r\dot{\omega}$

(1/2 ponto)

$$\boxed{a_G = \frac{r\left[M - K(R+r)^2\theta\right]}{J_G + mr^2}} \quad (1/2)$$

Solução alternativa:

T.M.A. em relação ao polo C:

$C = C.I.R \Rightarrow \vec{a}_c \parallel (G-C)$ e $F = K\delta = K(R+r)\theta$

$J_c \dot{\omega} = M - F(R+r) \Rightarrow \boxed{\dot{\omega} = \dfrac{M - K(R+r)^2\theta}{J_G + mr^2}}$

ou ainda:

T.M.A. em relação ao polo G:

G - baricentro.

$J_G \dot{\omega} = M - FR + Tr = M - K(R+r)R\theta + Tr$

T.M.B. do carretel:

$m a_G = -T - F \Rightarrow T = -m a_G - F$

$a_G = r\dot{\omega} \Rightarrow T = -mr\dot{\omega} - K(R+r)\theta$

$J_G \dot{\omega} = M - K(R+r)\theta R - mr^2\dot{\omega} - K(R+r)\theta r$

$(J_G + mr^2)\dot{\omega} = M - K(R+r)(R+r)\theta$

$$\boxed{\dot{\omega} = \frac{M - K(R+r)^2\theta}{J_G + mr^2}}$$