ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

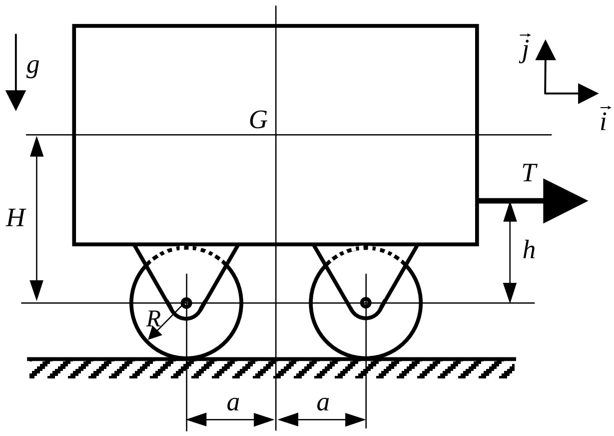
PME 2100 – MECÂNICA A

Terceira Prova – 06 de dezembro de 2002 – Duração: 100 minutos
(importante: não é permitida a utilização de calculadoras)

Nome: ____

Assinatura: ____

(5,0 pontos) Questão 1 – O vagão mostrado na figura é tracionado por uma força T a uma altura h dos eixos das rodas de maneira que os esforços nos dois eixos sejam iguais. A massa da carroceria do vagão é M e a massa de cada uma das rodas é m, supostas homogêneas. A altura do baricentro da carroceria é H em relação ao eixo das rodas. Sabendo que as rodas rolam sem escorregar, pede-se:



a) O diagrama de corpo livre do vagão e os diagramas de corpo livre de cada roda. (½ + ½)

b) A aplicação do Teorema do Movimento do Baricentro e do Teorema do Momento Angular em uma roda. (½ + ½)

c) A aplicação do Teorema do Movimento do Baricentro e do Teorema do Momento Angular no vagão. (½ + ½)

d) A aceleração do vagão. (1)

e) A altura h do engate do vagão para que os esforços nos dois eixos sejam iguais. (1)

Dado: para um disco homogêneo de centro de massa em C e raio R: $J_{Cz} = \dfrac{mR^2}{2}$

(5,0 pontos) Questão 2 – Um sólido é composto por uma barra AB, homogênea, de comprimento L e massa $3M$ e dois pontos materiais de massa M cada um, rigidamente fixados nas extremidades A e B da barra. O sólido é articulado sem atrito em A. Pede-se:

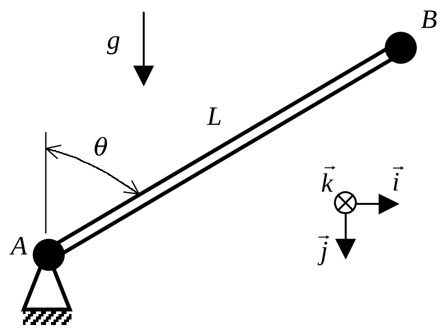
a) O momento de inércia do sólido em relação ao eixo paralelo ao versor $\vec{k}$ e que passa pelo ponto A.

b) A velocidade angular do sólido, em função de θ. Sabe-se que ele é liberado em $\theta = 30^{o}$, partindo do repouso. Use o Teorema da Energia Cinética

c) O diagrama de corpo livre do sólido na posição inicial, $\theta = 30^{o}$, logo depois de liberado.

d) A aceleração angular do sólido, para $\theta = 30^{o}$, logo depois de liberado. Use o Teorema do Momento Angular.

e) As reações da articulação A no sólido neste instante.



$J_{Gz} = \dfrac{ml^2}{12}$ (para uma barra homogênea de massa m e comprimento l)

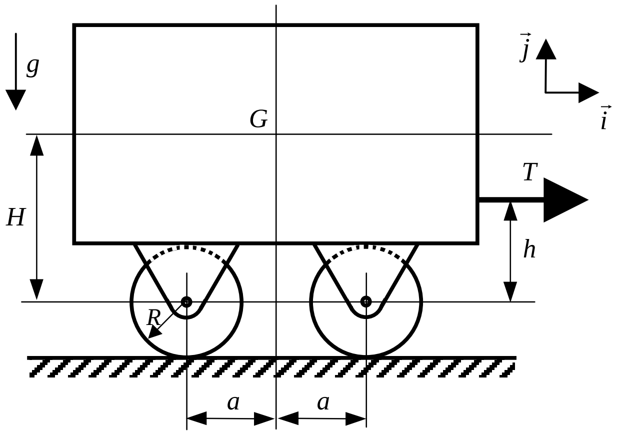
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 2100 – MECÂNICA A

Terceira Prova – 06 de dezembro de 2002 – Gabarito

(5,0 pontos) Questão 1 – O vagão mostrado na figura é tracionado por uma força T a uma altura h dos eixos das rodas de maneira que os esforços nos dois eixos são iguais. A massa da carroceria do vagão é M e a massa de cada uma das rodas é m, supostas homogêneas. A altura do baricentro da carroceria é H em relação ao eixo das rodas. Sabendo que as rodas rolam sem escorregar, pede-se:



a) O diagrama de corpo livre do vagão e os diagramas de corpo livre de cada roda.

b) A aplicação do Teorema do Movimento do Baricentro e do Teorema do Momento Angular em uma roda.

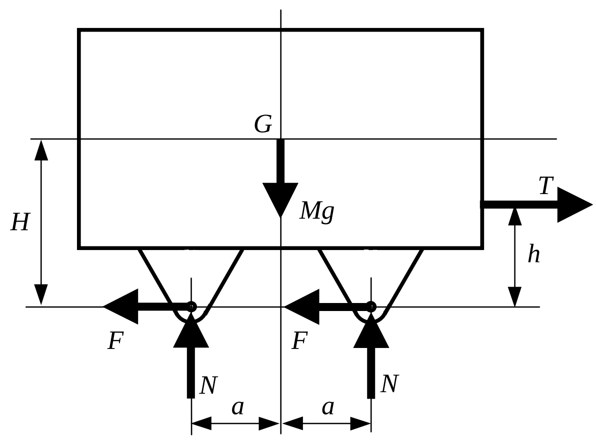
c) A aplicação do Teorema do Movimento do Baricentro e do Teorema do Momento Angular no vagão.

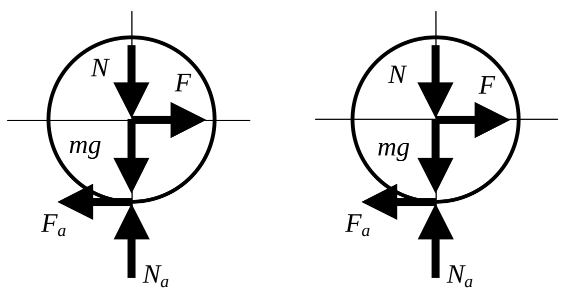
d) A aceleração do vagão.

e) A altura h do engate do vagão para que os esforços nos dois eixos sejam iguais.

Para um disco homogêneo de centro de massa em C e raio R temos: $J_{Cz} = \dfrac{mR^2}{2}$

Solução:
Item (a)
O enunciado informa que os esforços nos dois eixos são iguais:
Diagrama de corpo livre do vagão: Diagramas de corpo livre das rodas:





Item (b)

Roda:

Teorema do Movimento do Baricentro:

$$ma_{Rx} = F - F_a \qquad (1)$$

$$ma_{Ry} = N_a - N - mg \qquad (2)$$

Teorema do Momento Angular:

$$J_R \dot{\omega}_R = F_a R \qquad (3)$$

Item (c)

Vagão:

Teorema do Movimento do Baricentro:

$$Ma_{Gx} = T - 2F \qquad (4)$$

$$Ma_{Gy} = 2N - Mg \qquad (5)$$

Teorema do Momento Angular:

$$J_G \dot{\omega} = -2FH + T(H - h) \qquad (6)$$

Item (d):

Observando o movimento do vagão temos:

$$a_{Ry} = a_{Gy} = 0$$

Como não há escorregamento, e como o centro da roda translada com o vagão:

$$a_{Rx} = a_{Gx} = a_G$$

Como:

$$\dot{\omega}_R = \frac{a_{Rx}}{R}$$

então:

$$\dot{\omega}_R = \frac{a_G}{R} \qquad (7)$$

Usando (7) em (3):

$$\frac{mR^2}{2}\frac{a_G}{R} = F_a R$$

$$F_a = \frac{ma_G}{2} \qquad (8)$$

De (1) e (8):

$$ma_G = F - F_a$$

$$F = ma_G + F_a = ma_G + \frac{ma_G}{2}$$

$$F = \frac{3ma_G}{2} \qquad (9)$$

Aplicando (9) em (4):

$$Ma_G = T - 2F = T - 2\frac{3ma_G}{2} = T - 3ma_G$$

$$Ma_G + 3ma_G = T$$

$$(M + 3m)a_G = T$$

$$a_G = \frac{T}{(M + 3m)} \qquad (10)$$

Item (e)

Usando (9) e (10) em (6), e sabendo que $\dot{\omega} = 0$:

$$T(H - h) = 2FH$$

$$T(H - h) = 3ma_G H$$

$$T(H - h) = 3m\frac{T}{(M + 3m)}H$$

$$H - h = \frac{3m}{(M + 3m)}H$$

$$h = \left[1 - \frac{3m}{(M + 3m)}\right]H$$

$$h = \frac{M}{(M + 3m)}H$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

(5,0 pontos) Questão 2 – Um sólido é composto por uma barra *AB*, homogênea, de comprimento *L* e massa 3*M* e dois pontos materiais de massa *M* cada um, rigidamente fixados nas extremidades *A* e *B* da barra. O sólido é articulado sem atrito em *A*. Pede-se:

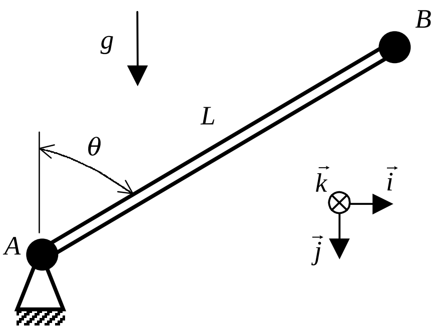
a) O momento de inércia do sólido em relação ao eixo paralelo ao versor $\vec{k}$ e que passa pelo ponto *A*. (½ + ½)

b) A velocidade angular do sólido, em função de θ, sabendo que ele é liberado em $\theta = 30^o$, partindo do repouso. Use o Teorema da Energia Cinética (½ + ½)

c) O diagrama de corpo livre do sólido na posição $\theta = 30^o$, logo depois de liberado. (1)

d) A aceleração angular do sólido para $\theta = 30^o$, logo depois de liberado. Use o Teorema do Momento Angular. (½ + ½)

e) As reações da articulação *A* no sólido neste instante. (½ + ½)



$$J_{Gz} = \frac{ml^2}{12}$$ (para uma barra homogênea de massa *m* e comprimento *l*)

Solução:

Item (a)

$$J_{Az} = \underbrace{\frac{(3M)L^2}{12} + (3M)\left(\frac{L}{2}\right)^2}_{barra} + \underbrace{M0^2 + ML^2}_{pontos\ \ materiais} = \frac{3ML^2}{12} + \frac{3ML^2}{4} + ML^2 = \frac{3ML^2 + 9ML^2 + 12ML^2}{12} = \frac{24ML^2}{12}$$

$$J_{Az} = 2ML^2$$

Item (b)

Energia cinética:

$$E = \frac{J_{Az}\dot{\theta}^2}{2} = \frac{2ML^2}{2}\dot{\theta}^2 = ML^2\dot{\theta}^2$$

Trabalho da força peso:

$$W = 5Mg\left[\frac{L}{2}\left(\cos 30^o - \cos\theta\right)\right] = 5Mg\left[\frac{L}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos\theta\right)\right]$$

Teorema da energia cinética (o sólido parte do repouso):

$$E - E_0 = W \Rightarrow E - 0 = W$$

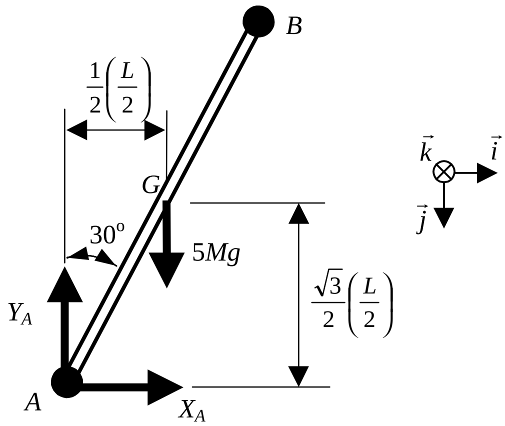
$$ML^2\dot{\theta}^2 = 5Mg\left[\frac{L}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos\theta\right)\right]$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{5Mg\left[\frac{L}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos\theta\right)\right]}{ML^2}$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{5g\left(\sqrt{3} - 2\cos\theta\right)}{4L}$$

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{5g\left(\sqrt{3} - 2\cos\theta\right)}{4L}}$$

Item (c)
Pela simetria, o baricentro do sólido está no centro da barra, e pelo enunciado, a massa do sólido é 5*M*.



Item (d)
Teorema do Momento Angular:

$$J_{Az}\dot{\omega} = (5Mg)\left(\frac{L}{4}\right) \Rightarrow 2ML^2\dot{\omega} = \frac{5}{4}MgL \Rightarrow \dot{\omega} = \frac{5g}{8L}$$

Item (e)
Teorema do Movimento do Baricentro:

$$(5M)\vec{a}_G = X_A\vec{i} + (-Y_A + 5Mg)\vec{j} \qquad \text{(I)}$$

Pela cinemática:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \wedge (G - A) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G - A)]$$

Como $\dot{\omega}$ é no sentido horário, $\dot{\vec{\omega}} = \frac{5g}{8L}\vec{k}$, e considerando que o ponto *A* é fixo e que logo após a liberação da barra temos $\vec{\omega} = \vec{0}$:

$$\vec{a}_G = \frac{5g}{8L}\vec{k} \wedge \left(\frac{L}{4}\vec{i} - \frac{\sqrt{3}L}{4}\vec{j}\right)$$

$$\vec{a}_G = \frac{5\sqrt{3}g}{32}\vec{i} + \frac{5g}{32}\vec{j}$$

$$(5M)\vec{a}_G = \frac{5M\,5\sqrt{3}g}{32}\vec{i} + \frac{5M\,5g}{32}\vec{j}$$

$$(5M)\vec{a}_G = \frac{25\sqrt{3}}{32}Mg\vec{i} + \frac{25}{32}Mg\,\vec{j} \qquad \text{(II)}$$

Comparando (I) e (II):

$$X_A = \frac{25\sqrt{3}}{32}Mg$$

$$-Y_A + 5Mg = \frac{25}{32}Mg \Rightarrow Y_A = \frac{135}{32}Mg$$

$$\vec{X}_A = \frac{25\sqrt{3}}{32}Mg\,\vec{i}$$

$$\vec{Y}_A = -\frac{135}{32}Mg\,\vec{j}$$