ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

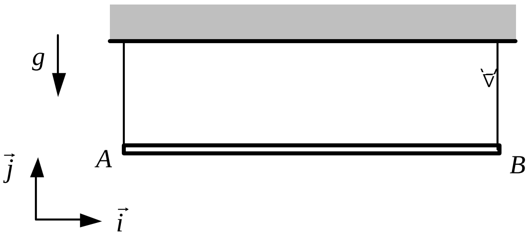
PMC 2100 – MECÂNICA A

Terceira Prova – 08 de dezembro de 2000 – Duração: 100 minutos
(importante: não é permitida a utilização de calculadoras)

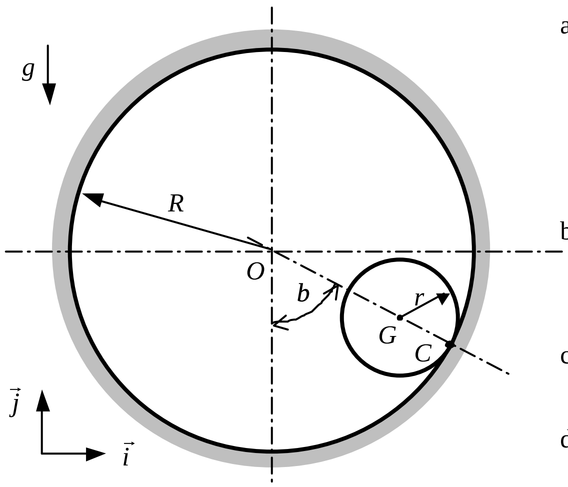
Nome: ____

Assinatura: ____

(3,0 pontos) Questão 1 – A haste homogênea horizontal *AB* de massa m e comprimento l está presa por dois fios de mesmo comprimento, conforme mostra a figura. O momento de inércia da haste em relação ao seu baricentro é $I_G = \frac{ml^2}{12}$. Sabendo que o fio da direita se rompe, determine a força de tração no fio da esquerda logo após a ruptura.



(3,5 pontos) Questão 2 – Um disco homogêneo de massa m e raio r rola sem escorregar em uma superfície cilíndrica fixa de raio R.



a) Determine a energia cinética do disco em função de sua velocidade angular w, em uma posição genérica, e usando o momento de inércia em relação a C (pertencente ao disco). O momento de inércia do disco em relação ao seu centro de massa é $I_G = \frac{mr^2}{2}$.

b) Sabendo que o disco é liberado do repouso na posição onde $b = b_0$, determine sua velocidade angular $\vec{w}$ e a velocidade $\vec{v}_G$ de seu centro de massa quando $b = 0°$.

c) Determine a relação entre a velocidade angular w do disco e $\dot{b}$.

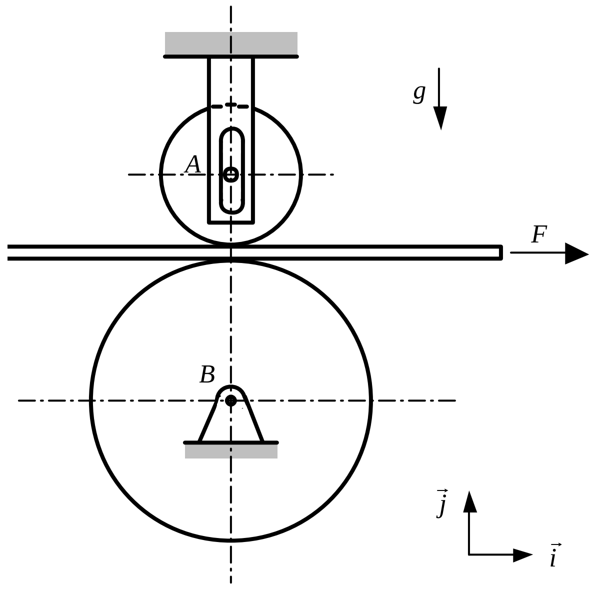
d) Calcule a reação normal da superfície cilíndrica sobre o disco quando $b = 0°$.

(3,5 pontos) Questão 3 – Uma placa é puxada entre dois cilindros em um processo de conformação mecânica, com uma força F constante. A massa da placa é desprezível em relação às inércias dos cilindros. O cilindro superior tem massa m e raio r, e seu centro A pode deslizar sem atrito pela guia vertical. O cilindro inferior, de massa $4m$ e raio $2r$, está articulado sem atrito pelo seu centro B. Não há escorregamento entre a placa e os cilindros.

a) Desenhe os diagramas de corpo livre da placa e de cada cilindro.

b) Calcule as forças de atrito entre a placa e os cilindros em função de suas acelerações angulares.

c) Calcule as acelerações angulares dos cilindros em função da força F.



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

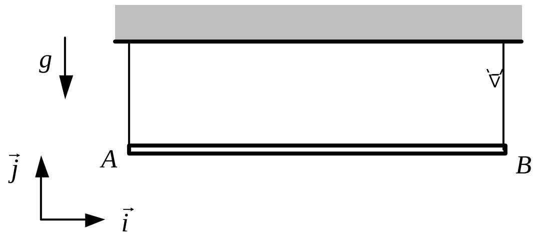
Departamento de Engenharia Mecânica

PMC 2100 – MECÂNICA A

Terceira Prova – 08 de dezembro de 2000

GABARITO

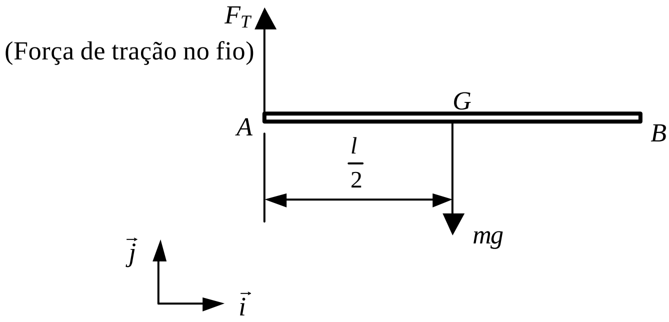
(3,0 pontos) Questão 1 – A haste homogênea horizontal *AB* de massa *m* e comprimento *l* está presa por dois fios de mesmo comprimento, conforme mostra a figura. O momento de inércia da haste em relação ao seu baricentro é $I_G = \frac{ml^2}{12}$. Sabendo que o fio da direita se rompe, determine a força de tração no fio da esquerda logo após a ruptura.



Solução:

TMB:

$$ma_G = F_T - mg \qquad (1)$$



TMA:

$$I_G\dot{w} = -F_T\,\frac{l}{2}$$

$$\frac{ml^2}{12}\dot{w} = -F_T\,\frac{l}{2}$$

$$\dot{w} = -\frac{6F_T}{ml} \qquad (2)$$

Relação cinemática:

$$a_G = \dot{w}\,\frac{l}{2}$$

$$\dot{w} = \frac{2a_G}{l} \qquad (3)$$

Usando as equações (2) e (3) obtemos:

$$\frac{2a_G}{l} = -\frac{6F_T}{ml}$$

$$a_G = -\frac{3F_T}{m} \qquad (4)$$

Substituindo (4) em (1):

$$m\left(-\frac{3F_T}{m}\right) = F_T - mg$$

$$4F_T = mg$$

$$\boxed{F_T = \frac{mg}{4}}$$

Solução alternativa

TMA

Em relação a *G*:

$$I_G\dot{w} = -F_T\,\frac{l}{2}$$

$$\frac{ml^2}{12}\dot{w} = -F_T\,\frac{l}{2}$$

Em relação a *A*:

$$I_A\dot{w} = -mg\,\frac{l}{2}$$

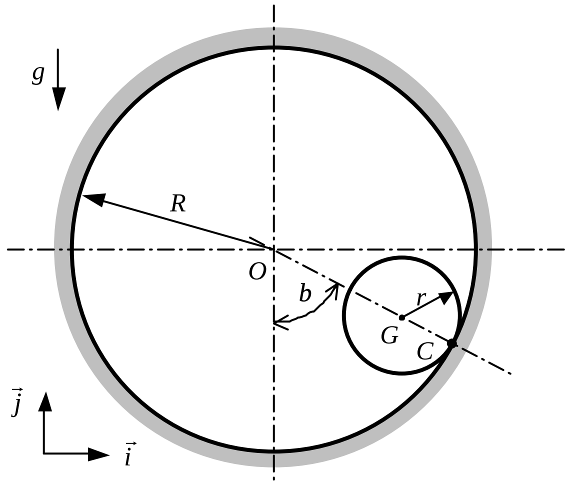
$$\frac{ml^2}{3}\dot{w} = -mg\,\frac{l}{2}$$

$$\frac{ml^2}{12}\dot{w} = -\left(\frac{mg}{4}\right)\frac{l}{2}$$

portanto: $\boxed{F_T = \frac{mg}{4}}$

Obs.: $I_A = I_G + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{3}$

(3,5 pontos) Questão 2 – Um disco homogêneo de massa m e raio r rola sem escorregar em uma superfície cilíndrica fixa de raio R.



a) Determine a energia cinética do disco em função de sua velocidade angular w, em uma posição genérica, e usando o momento de inércia em relação a C (pertencente ao disco). O momento de inércia do disco em relação ao seu centro de massa é $I_G = \dfrac{mr^2}{2}$.

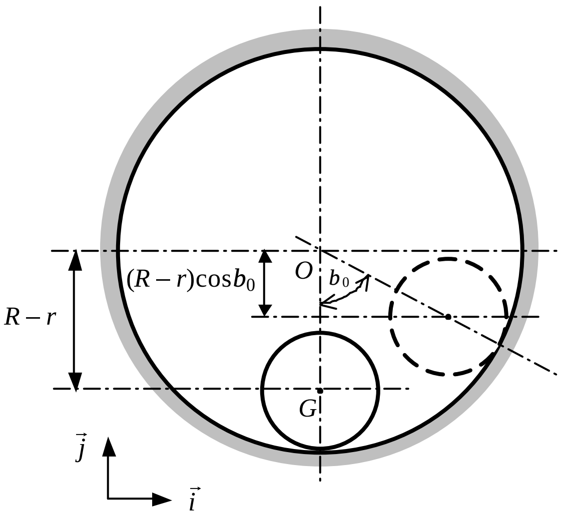
b) Sabendo que o disco é liberado do repouso na posição onde $b = b_0$, determine sua velocidade angular $\vec{w}$ e a velocidade $\vec{v}_G$ de seu centro de massa quando $b = 0°$.

c) Determine a relação entre a velocidade angular w do disco e $\dot{b}$.

d) Calcule a reação normal da superfície cilíndrica sobre o disco quando $b = 0°$.

Solução:

a) $T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_G w^2 \Rightarrow T = \frac{1}{2} m (wr)^2 + \frac{1}{2}\frac{mr^2}{2} w^2 \Rightarrow T = \frac{1}{2}\left(\frac{3mr^2}{2}\right) w^2 \Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2} I_C w^2}$



b) TEC: $T_1 + U_{1\to 2} = T_2$

$T_1 = 0 \qquad T_2 = \dfrac{3mr^2}{4} w^2$

$U_{1\to 2} = mg(R - r)(1 - \cos b_0)$

$0 + mg(R-r)(1-\cos b_0) = \dfrac{3mr^2}{4} w^2$

$w^2 = \dfrac{4g}{3r^2}(R-r)(1-\cos b_0)$

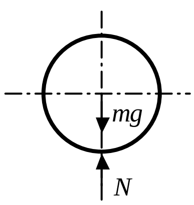
$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{w} = \sqrt{\dfrac{4g}{3r^2}(R-r)(1-\cos b_0)}\,\vec{k} \\ \vec{v}_G = -\sqrt{\dfrac{4g}{3}(R-r)(1-\cos b_0)}\,\vec{i} \end{array}}$$

$\vec{v}_G = -wr\,\vec{i} \Rightarrow$

c) $v_G = wr = \dot{b}(R-r) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{b} = \dfrac{r}{R-r} w}$

d) TMB: $\quad m a_G \vec{j} = (N - mg)\vec{j} \Rightarrow N = m(a_G + g)$

$a_G = a_n = \dot{b}^2 (R-r)$ (no ponto mais baixo da trajetória w é máximo, logo $\dot{w} = 0 \Rightarrow a_t = \dot{w} r = 0$)

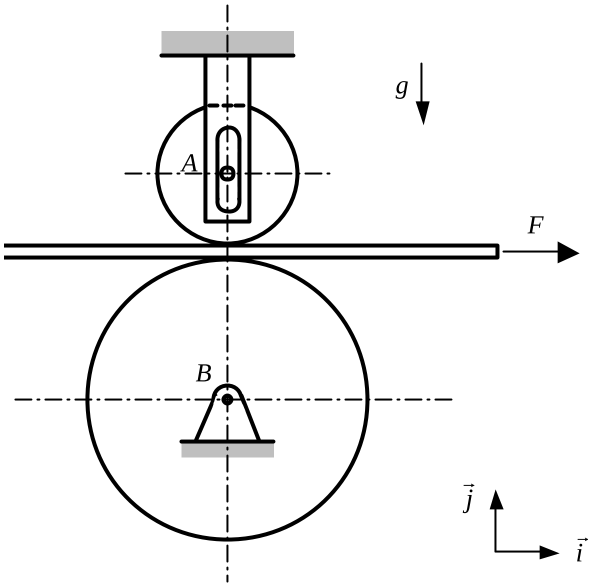


$$N = m\left[\dot{b}^2(R-r) + g\right] \Rightarrow N = m\left[\left(\frac{r}{R-r} w\right)^2 (R-r) + g\right]$$

$$N = m\left[\left(\frac{r}{R-r}\right)^2 \left[\frac{4g}{3r^2}(R-r)(1-\cos b_0)\right](R-r) + g\right]$$

$$\boxed{\vec{N} = m\left[\frac{4g}{3}(1-\cos b_0) + g\right]\vec{j}}$$

(3,5 pontos) Questão 3 – Uma placa é puxada entre dois cilindros em um processo de conformação mecânica, com uma força F constante. A massa da placa é desprezível em relação às inércias dos cilindros. O cilindro superior tem massa m e raio r, e seu centro A pode deslizar sem atrito pela guia vertical. O cilindro inferior, de massa $4m$ e raio $2r$, está articulado sem atrito pelo seu centro B. Não há escorregamento entre a placa e os cilindros.



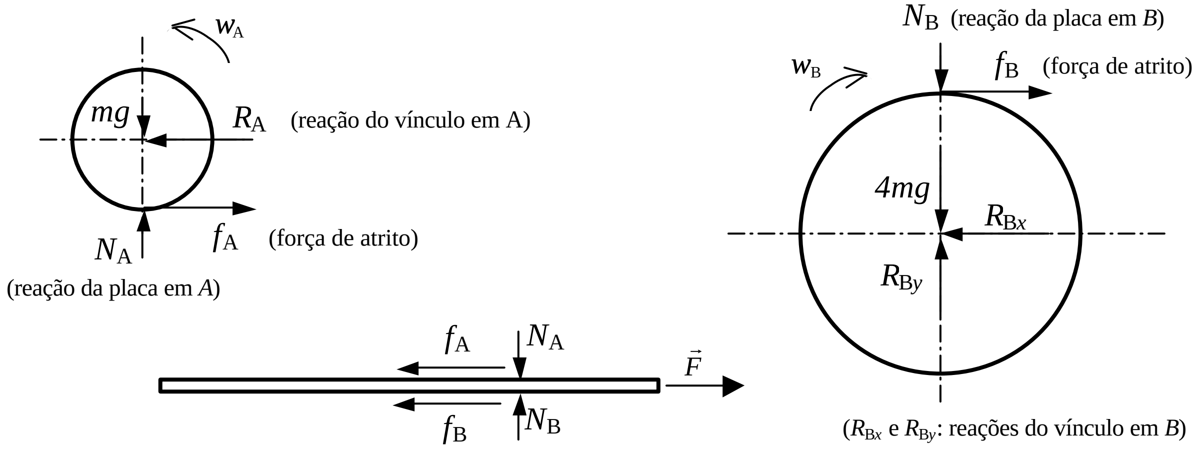
a) Desenhe os diagramas de corpo livre da placa e de cada cilindro.

b) Calcule as forças de atrito entre a placa e os cilindros em função de suas acelerações angulares.

c) Calcule as acelerações angulares dos cilindros em função da força F.

Solução:

a)



b) TMA

cilindro superior:

$$I_A\dot{w}_A = f_A r$$

$$f_A = \frac{I_A \dot{w}_A}{r} \Rightarrow f_A = \frac{mr^2}{2}\frac{\dot{w}_A}{r}$$

$$\boxed{f_A = \frac{mr}{2}\dot{w}_A} \qquad (1)$$

cilindro inferior:

$$I_B\dot{w}_B = f_B 2r$$

$$f_B = \frac{I_B \dot{w}_B}{2r} \Rightarrow f_B = \frac{4m(2r)^2}{2}\frac{\dot{w}_B}{2r}$$

$$\boxed{f_B = 4mr\dot{w}_B} \qquad (2)$$

c) TMB

placa:

$$0 = F - f_A - f_B \Rightarrow \quad F = f_A + f_B \qquad (3)$$

$$0 = N_B - N_A$$

como não há escorregamento, as acelerações tangenciais são iguais:

$$a_t = \dot{w}_A r = \dot{w}_B 2r \Rightarrow \dot{w}_A = 2\dot{w}_B \qquad (4)$$

De (1), (2), (3) e (4): $F = \frac{mr}{2}2\dot{w}_B + 4mr\dot{w}_B = 5mr\dot{w}_B \Rightarrow$ $\boxed{\dot{w}_B = \frac{F}{5mr} \quad \dot{w}_A = \frac{2F}{5mr}}$