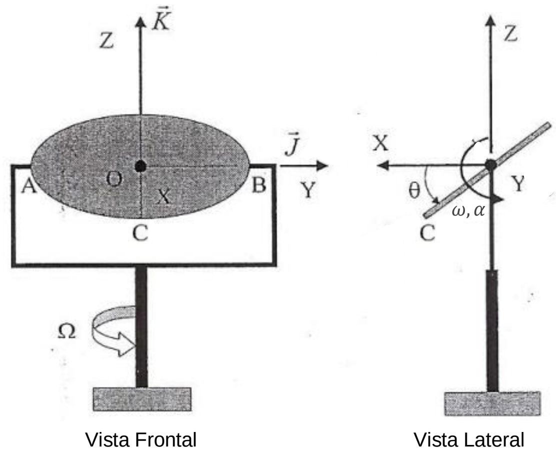
PME 3100 – MECÂNICA I – Reoferecimento 2024 – Prova P2 – 21 de Maio de 2024

Instruções gerais e formulário estão disponíveis na folha de respostas.

Questão 1 (3,5 pontos). O sistema mostrado na figura é composto por um disco homogêneo, de raio R, que gira em torno do eixo AB do garfo AB, com velocidade angular $\vec{\omega} = \omega\vec{J}$ e aceleração angular $\vec{\alpha} = \alpha\vec{J}$. O garfo AB está preso a um eixo vertical que gira com velocidade angular $\vec{\Omega} = \Omega\vec{K}$, constante. Utilizando o sistema de coordenadas OXYZ, de versores $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$, solidário ao garfo AB (referencial móvel), determine *para o instante em que* $\theta = 90^o$:



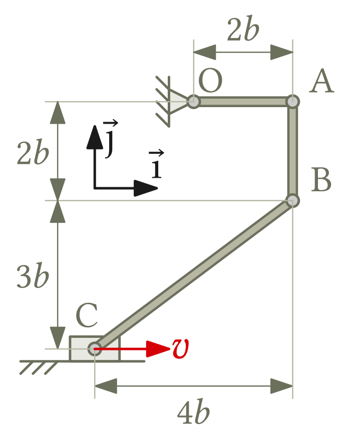
a) (1,0) a velocidade relativa $\vec{v}_{C,\mathrm{rel}}$, de arrastamento $\vec{v}_{C,\mathrm{arr}}$ e absoluta $\vec{v}_{C,\mathrm{abs}}$ do ponto C na extremidade do disco;

b) (1,5) a aceleração relativa $\vec{a}_{C,\mathrm{rel}}$, de arrastamento $\vec{a}_{C,\mathrm{arr}}$ e absoluta $\vec{a}_{C,\mathrm{abs}}$ do ponto C na extremidade do disco;

c) (0,5) a velocidade angular absoluta $\vec{\omega}_{\mathrm{abs}}$ do disco;

d) (0,5) a aceleração angular absoluta $\vec{\alpha}_{\mathrm{abs}}$ do disco.

Questão 2 (3,0 pontos). No mecanismo ilustrado as barras OA, AB e BC são corpos rígidos e os vínculos em O, A, B e C são articulações ideais. Para o instante mostrado na figura, sabe-se que o ponto C tem velocidade $\vec{v}_C = v\vec{i}$ e que a barra AB descreve um ato de movimento de *translação*. Assim, considerando *apenas o instante ilustrado*, pede-se:



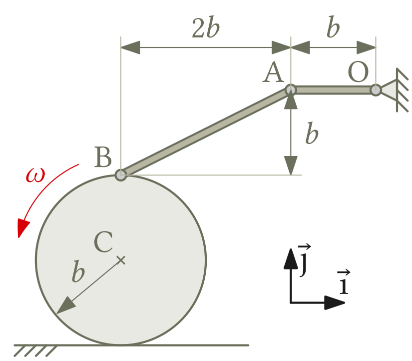
a) (1,0) a velocidade $\vec{v}_B$ do ponto B e a velocidade angular $\vec{\omega}_1$ da barra AB;

b) (0,5) a velocidade angular $\vec{\omega}$ da barra OA;

c) (1,0) identificar as direções instantâneas dos versores tangente $\vec{t}$ e normal $\vec{n}$ ao movimento descrito pelo ponto A.

d) (0,5) a componente normal a_n da aceleração do ponto A.

Questão 3 (3,5 pontos). O mecanismo da figura é constituído por um disco de raio b e duas barras AB e AO, todos modelados como corpos rígidos. Sabendo que o disco rola sem escorregar sobre as superfície fixa com a qual está em contato, que os vínculos em A, B e O são articulações ideais e que a velocidade angular do disco é $\vec{\omega}_1 = \omega\vec{k}$ *constante*, pede-se para *instante ilustrado*:



a) (1,0) a velocidade $\vec{v}_B$ e a aceleração $\vec{a}_B$ do ponto B;

b) (0,5) esboçar a construção geométrica para a determinação do centro instantâneo de rotação I da barra AB;

c) (1,0) a velocidade angular $\vec{\omega}_2$ da barra AB e a velocidade $\vec{v}_A$ do ponto A;

d) (1,0) a aceleração angular $\vec{\alpha}_2$ da barra AB e a aceleração $\vec{a}_A$ do ponto A.

Resolução comentada

Questão 1 (3,5 pontos)

a) Considerando a composição de velocidades e admitindo o garfo AB como referencial móvel, tem-se:

$$\vec{v}_{C,\,abs} = \vec{v}_{C,\,rel} + \vec{v}_{C,\,arr}$$

onde

$$\vec{v}_{C,\,rel} = \vec{v}_{O,\,rel} + \vec{\omega}_{rel} \wedge (C - O) = \omega\vec{J} \wedge -R\vec{K}, \quad \vec{v}_{O,\,rel} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{v}_{C,\,rel} = -\omega R\vec{I}} \quad (0,4)$$

$$\vec{v}_{P,\,arr} = \vec{v}_{O,\,arr} + \vec{\omega}_{arr} \wedge (C - O) = \Omega\vec{K} \wedge -R\vec{K}, \quad \vec{v}_{O,\,arr} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{v}_{C,\,arr} = \vec{0}} \quad (0,4)$$

Finalmente, a velocidade absoluta do ponto C do disco é dada por:

$$\boxed{\vec{v}_{C,\,abs} = -\omega R\vec{I}} \quad (0,2)$$

b) Analogamente, considerando a composição de acelerações e admitindo o garfo AB como referencial móvel, tem-se:

$$\vec{a}_{C,\,abs} = \vec{a}_{C,\,rel} + \vec{a}_{C,\,arr} + \vec{a}_{C,\,Cor}$$

onde

$$\begin{aligned}\vec{a}_{C,\,rel} &= \vec{a}_{O,\,rel} + \vec{\alpha}_{rel} \wedge (C - O) + \vec{\omega}_{rel} \wedge [\vec{\omega}_{rel} \wedge (C - O)], \quad \vec{a}_{O,\,rel} = \vec{0}, \quad \vec{\alpha}_{rel} = \alpha\vec{J} \\ &= (\alpha\vec{J} \wedge -R\vec{K}) + \omega\vec{J} \wedge [\omega\vec{J} \wedge -R\vec{K}] \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{a}_{C,\,rel} = -\alpha R\vec{I} + \omega^2 R\vec{K}} \quad (0,4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{a}_{C,\,arr} &= \vec{a}_{O,\,arr} + \vec{\alpha}_{arr} \wedge (C - O) + \vec{\omega}_{arr} \wedge [\vec{\omega}_{arr} \wedge (C - O)], \quad \vec{a}_{O,\,arr} = \vec{0}, \quad \vec{\alpha}_{arr} = \vec{0} \\ &= \Omega\vec{K} \wedge [\Omega\vec{K} \wedge -R\vec{K}] \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{a}_{C,\,arr} = \vec{0}} \quad (0,4)\end{aligned}$$

$$\vec{a}_{C,\,Cor} = 2\vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{v}_{C,\,rel} = 2\Omega\vec{K} \wedge -\omega R\vec{I} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{a}_{C,\,Cor} = -2\omega\Omega R\vec{J}} \quad (0,4)$$

Finalmente, a aceleração absoluta do ponto C do disco é dada por:

$$\boxed{\vec{a}_{C,\,abs} = -\alpha R\vec{I} - 2\omega\Omega R\vec{J} + \omega^2 R\vec{K}} \quad (0,3)$$

c) A velocidade angular absoluta do disco é dada por:

$$\vec{\omega}_{abs} = \vec{\omega}_{rel} + \vec{\omega}_{arr} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\omega}_{abs} = \omega\vec{J} + \Omega\vec{K}} \quad (0,5)$$

d) A aceleração angular absoluta do disco é dada por:

$$\vec{\alpha}_{abs} = \vec{\alpha}_{rel} + \vec{\alpha}_{arr} + \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{\omega}_{rel} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\alpha}_{abs} = -\omega\Omega\vec{I} + \alpha\vec{J}} \quad (0,5)$$

Questão 2 (3,0 pontos)

a) A barra AB está em *translação*, de onde decorre que $\vec{v}_A = \vec{v}_B$ e $\boxed{\vec{\omega}_1 = \vec{0}}$. (0,5)
Devido ao vínculo em O, o ponto A descreve um movimento circular de centro O e raio $2b$. Assim: $\vec{v}_A = \vec{v}_B = u\vec{j}$.
Usando a equação fundamental do corpo rígido para a barra BC:

$$\vec{v}_B \cdot (B - C) = \vec{v}_C \cdot (B - C) \quad \Rightarrow \quad u\vec{j} \cdot (4b\vec{i} + 3b\vec{j}) = v\vec{i} \cdot (4b\vec{i} + 3b\vec{j})$$

$$\Rightarrow \quad 3bu = 4bv \quad \Rightarrow \quad u = \frac{4}{3}v \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{v}_A = \vec{v}_B = \frac{4}{3}v\vec{j}} \qquad (0{,}5)$$

b) Do campo de velocidades para a barra OA:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (A - O) \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{3}v\vec{j} = \vec{0} + \omega\vec{k} \wedge (2b\vec{i}) \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{3}v\vec{j} = 2b\omega\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\omega} = \omega\vec{k} = \frac{2v}{3b}\vec{k}} \qquad (0{,}5)$$

c) A direção tangente é a direção de $\vec{v}_A$ ou seja, $\boxed{\vec{t} = \vec{j}}$. (0,5)
A direção normal aponta de A para o centro de curvatura O de sua trajetória, ou seja, $\boxed{\vec{n} = -\vec{i}}$. (0,5)
d) Componente normal da aceleração do ponto A: $a_n = \dfrac{|\vec{v}_A|^2}{\rho} = \dfrac{u^2}{2b} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_n = \dfrac{8v^2}{9b}}$ (0,5)

Questão 3 (3,5 pontos)

a) Sabendo que o disco rola sem escorregar sobre as superfície fixa com a qual está em contato e que a velocidade angular do disco é $\vec{\omega}_1 = \omega\vec{k}$ *constante* (ou seja, $\vec{\alpha}_1 = \vec{0}$), conclui-se que C descreve um movimento retilíneo e uniforme com:

$$\vec{v}_C = -\omega b\vec{i} \quad \text{e} \quad \vec{a}_C = \vec{0}$$

Assim, das equações dos campos de velocidades e de acelerações do disco:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_C + \vec{\omega}_1 \wedge (B - C) = -\omega b\vec{i} + \omega\vec{k} \wedge (b\vec{j}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{v}_B = -2\omega b\vec{i}} \qquad (0{,}5)$$

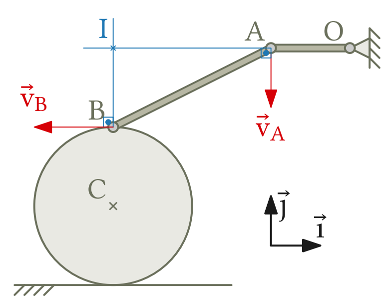
$$\vec{a}_B = \vec{a}_C + \vec{\alpha}_1 \wedge (B - C) + \vec{\omega}_1 \wedge \left[\vec{\omega}_1 \wedge (B - C)\right] = \vec{0} + \vec{0} + \omega\vec{k} \wedge [\omega\vec{k} \wedge (b\vec{j})] \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{a}_B = -\omega^2 b\vec{j}} \qquad (0{,}5)$$

b) Ver construção na figura ao lado. (0,5)
c) Da equação do campo de velocidades para a barra AB:

$$\vec{v}_B = \vec{\omega}_2 \wedge (B - I) \quad \Rightarrow \quad -2\omega b\vec{i} = \omega_2\vec{k} \wedge (-b\vec{j})$$

$$\Rightarrow \quad -2\omega b\vec{i} = \omega_2 b\vec{i} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\omega}_2 = \omega_2\vec{k} = -2\omega\vec{k}} \qquad (0{,}5)$$

$$\vec{v}_A = \vec{\omega}_2 \wedge (A - I) = -2\omega\vec{k} \wedge (2b\vec{i}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{v}_A = -4\omega b\vec{j}} \qquad (0{,}5)$$



d) Devido ao vínculo em O, o ponto A descreve um movimento circular de centro O e raio b. Assim:

$$\vec{a}_A = a_{At}(-\vec{j}) + \frac{|\vec{v}_A|^2}{b}\vec{i} = 16\omega^2 b\vec{i} - a_{At}\vec{j}$$

Utilizando a equação do campo de acelerações para a barra AB:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{\alpha}_2 \wedge (A - B) + \vec{\omega}_2 \wedge \left[\vec{\omega}_2 \wedge (A - B)\right]$$

$$16\omega^2 b\vec{\imath} - a_{At}\vec{\jmath} = -\omega^2 b\vec{\jmath} + \alpha_2\vec{k} \wedge (2b\vec{\imath} + b\vec{\jmath}) - \left| -2\omega\vec{k}\right|^2 (2b\vec{\imath} + b\vec{\jmath})$$

$$16\omega^2 b\vec{\imath} - a_{At}\vec{\jmath} = \left(-8\omega^2 b - \alpha_2 b\right)\vec{\imath} + \left(-\omega^2 b - 4\omega^2 b + 2\alpha_2 b\right)\vec{\jmath}$$

$$\begin{cases} 16\omega^2 b = -8\omega^2 b - \alpha_2 b \\ -a_{At} = -\omega^2 b - 4\omega^2 b + 2\alpha_2 b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{\alpha}_2 = \alpha_2\vec{k} = -24\omega^2\vec{k}} \qquad (0,5)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{a}_A = 16\omega^2 b\vec{\imath} - a_{At}\vec{\jmath} = 16\omega^2 b\vec{\imath} - 53\omega^2 b\vec{\jmath}} \qquad (0,5)$$