ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 – MECÂNICA I (Reoferecimento) – Prova P2 – 04 de Julho de 2023

- Esta avaliação tem duração de <u>120 minutos</u> e é composta por <u>3 questões</u>.
- Não é permitido utilização de quaisquer dispositivos eletrônicos, tampouco consulta a qualquer material externo.
- As questões podem ser resolvidas a lápis, na ordem escolhida pelo aluno (que deve indicar onde iniciou cada questão).

<u>Formulário</u>

$$m\vec{a}_G = \vec{R} = \sum_i \vec{F}_i \qquad m(G-O)\wedge\vec{a}_O + \frac{d}{dt}(\boldsymbol{J}_O\vec{\omega}) = \vec{M}_O = \sum_i (P_i - O)\wedge\vec{F}_i \qquad T = \frac{1}{2}m|\vec{v}_O|^2 + m\vec{v}_O\cdot\vec{\omega}\wedge(G-O) + \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot(\boldsymbol{J}_O\vec{\omega})$$

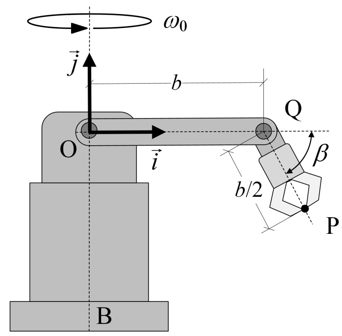
$$\boldsymbol{J}_O\vec{\omega} = (+J_{Ox}\omega_x - J_{Oxy}\omega_y - J_{Oxz}\omega_z)\vec{i} + (-J_{Oxy}\omega_x + J_{Oy}\omega_y - J_{Oyz}\omega_z)\vec{j} + (-J_{Oxz}\omega_x - J_{Oyz}\omega_y + J_{Oz}\omega_z)\vec{k}$$

$$\Delta T = W^{ext} + W^{int} = -\Delta V + W^{nc} \qquad V_g = mgh_G \qquad V_e = \frac{1}{2}k(l-l_0)^2 \qquad J_{Oz} = J_{Gz} + m(x_G^2 + y_G^2) \qquad J_{Oxy} = J_{Gxy} + mx_Gy_G$$

$$\vec{M}_A = \vec{M}_B + (B-A)\wedge\vec{R} \qquad \vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega}\wedge(A-B) \qquad \vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{\alpha}\wedge(A-B) + \vec{\omega}\wedge\left[\vec{\omega}\wedge(A-B)\right]$$

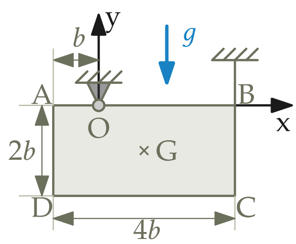
$$\vec{v}_P = \vec{v}_{P,rel} + \vec{v}_{P,arr} \qquad \vec{a}_P = \vec{a}_{P,rel} + \vec{a}_{P,arr} + 2\vec{\omega}_{arr}\wedge\vec{v}_{P,rel} \qquad \vec{\omega} = \vec{\omega}_{rel} + \vec{\omega}_{arr} \qquad \vec{\alpha} = \vec{\alpha}_{rel} + \vec{\alpha}_{arr} + \vec{\omega}_{arr}\wedge\vec{\omega}_{rel}$$

<u>Questão 1 (3,5 pontos)</u>. Um robô industrial é utilizado para posicionar uma pequena partícula P e pode ser modelado como uma base inercial e um braço articulado com dois elos, conforme ilustrado na figura. Durante um dos modos de operação do robô, a base B permance em repouso e o elo QO descreve um movimento de rotação em torno do eixo Oy com velocidade angular $\omega_0\vec{j}$ constante, de tal forma que o ângulo $Q\hat{O}B$ permanece reto. O sistema de coordenadas Oxyz, de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, permanece solidário ao elo QO. O elo PQ, por sua vez, descreve relativamente a QO uma rotação pura em torno do eixo Qz parametrizada pelo ângulo β e por suas derivadas temporais $\dot{\beta}$ e $\ddot{\beta}$, conhecidas. Considerando as dimensões dos elos indicadas na figura, determine em função dos dados do problema, <u>para a configuração em que $\beta = \pi/2$</u>:



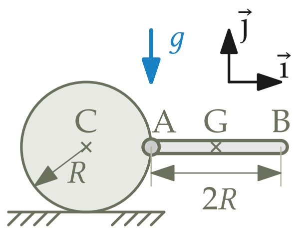
a) (0,4) o vetor velocidade angular absoluta ($\vec{\omega}$) do elo PQ do braço do robô;
b) (0,5) o vetor aceleração angular absoluta ($\vec{\alpha}$) do elo PQ do braço do robô;
c) (1,1) os vetores das velocidades relativa ($\vec{v}_{P,rel}$), de arrastamento ($\vec{v}_{P,arr}$) e absoluta ($\vec{v}_P$) da partícula P;
d) (1,5) os vetores das acelerações relativa ($\vec{a}_{P,rel}$), de arrastamento ($\vec{a}_{P,arr}$) e absoluta ($\vec{a}_P$) da partícula P.

<u>Questão 2 (3,0 pontos)</u>. Uma placa retangular homogênea ABCD, de massa m e momento de inércia $J_{Gz} = 5mb^2/3$, é mantida em equilíbrio por meio de uma articulação fixa em O e de um fio ideal vertical em B. Em um dado instante o fio é cortado e a placa inicia um movimento descrito como uma rotação pura em torno do eixo Oz. Considerando a aceleração da gravidade (g), as dimensões e o sistema de coordenadas fornecidos na figura e desprezando quaisquer efeitos dissipativos, pede-se o diagrama de corpo livre (DCL) da placa, os vetores velocidade angular ($\vec{\omega}$) e aceleração angular ($\vec{\alpha}$) e as componentes X_O e Y_O da reação na articulação para cada uma das configurações a seguir:



a) (0,6) antes do corte do fio, com a placa ainda em equilíbrio;
b) (1,2) imediatamente após o corte do fio, com O e B ainda alinhados horizontalmente;
c) (1,2) na primeira vez em que O e G ficam alinhados verticalmente após o corte do fio.

<u>Questão 3 (3,5 pontos)</u>. No sistema ilustrado na figura, o disco homogêneo de centro C, raio R, massa m, momento de inércia $J_{Cz} = mR^2/2$ pode rolar sem escorregar sobre uma superfície horizontal. A barra esbelta e homogênea AB de comprimento $2R$, massa m e momento de inércia central $J_{Gz} = mR^2/3$, encontra-se vinculada ao bordo do disco por meio de uma articulação. Considerando a base de vetores e a aceleração da gravidade g fornecidas, e admitindo que o sistema parta do <u>repouso</u> da configuração indicada na figura, pede-se, para <u>esta configuração</u>:



a) (0,4) os diagramas de corpo livre (DCLs) do disco e da barra;
b) (0,6) as expressões dos vetores de aceleração $\vec{a}_C$, $\vec{a}_A$ e $\vec{a}_G$, dos pontos C, A e G em função das acelerações angulares $\vec{\alpha}_1 = \alpha_1\vec{k}$ do disco e $\vec{\alpha}_2 = \alpha_2\vec{k}$ da barra.
c) (1,2) o sistema de equações, obtido a partir da aplicação dos teoremas da dinâmica, que permite determinar os valores de α_1, α_2 e as componentes de reação na configuração desejada (*enumere as equações obtidas*);
d) (0,4) utilizar o sistema de equações obtido para expressar as componentes de reação em função de α_1 e α_2.
e) (0,4) resolver o sistema, encontrando os valores de α_1 e α_2 em função dos dados do problema.
f) (0,5) determinar o menor valor de coeficiente de atrito estático μ entre o disco e a superfície, consistente com a condição de rolamento sem escorregamento.

Questão 1 (3,5 pontos)

Distribuição de pontos:

(a) 0,4 ponto para a expressão correta da velocidade;

(b) 0,5 ponto para a expressão correta da aceleração;

(c) 0,4 ponto para cada uma das expressões corretas das velocidades relativa e de arrastamento e 0,3 ponto para a expressão correta da velocidade absoluta;

(d) 0,4 ponto para cada uma das expressões corretas das acelerações relativa, de arrastamento e de Coriolis e 0,3 ponto para a expressão correta da aceleração absoluta;

Resolução:

(a) O vetor velocidade angular absoluta ($\vec{\omega}$) do elo PQ do braço do robô:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_{rel} + \vec{\omega}_{arr}$$
$$\vec{\omega}_{rel} = -\dot{\beta}\vec{k}$$
$$\vec{\omega}_{arr} = \omega_0\vec{j}$$
$$\boxed{\vec{\omega} = \omega_0\vec{j} - \dot{\beta}\vec{k}}$$

(b) O vetor aceleração angular absoluta ($\vec{\alpha}$) do elo PQ do braço do robô:

$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_{rel} + \vec{\alpha}_{arr} + \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{\omega}_{rel}$$
$$\vec{\alpha}_{rel} = -\ddot{\beta}\vec{k}$$
$$\vec{\alpha}_{arr} = \vec{0}$$
$$\vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{\omega}_{rel} = (\omega_0\vec{j}) \wedge \left(-\dot{\beta}\vec{k}\right) = -\omega_0\dot{\beta}\vec{i}$$
$$\boxed{\vec{\alpha} = -\omega_0\dot{\beta}\vec{i} - \ddot{\beta}\vec{k}}$$

(c) Os vetores das velocidades relativa ($\vec{v}_{P,rel}$), de arrastamento ($\vec{v}_{P,arr}$) e absoluta ($\vec{v}_{P}$) da partícula P:

$$\vec{v}_{P,rel} = \vec{v}_{Q,rel} + \vec{\omega}_{rel} \wedge (P - Q)$$
$$\vec{v}_{P,rel} = \vec{0} + \left(-\dot{\beta}\vec{k}\right) \wedge \left(-\frac{b}{2}\vec{j}\right)$$
$$\boxed{\vec{v}_{P,rel} = -\frac{b\dot{\beta}}{2}\vec{i}}$$
$$\vec{v}_{P,arr} = \vec{v}_{Q,arr} + \vec{\omega}_{arr} \wedge (P - O)$$
$$\vec{v}_{P,arr} = \vec{0} + (\omega_0\vec{j}) \wedge \left(b\vec{i} - \frac{b}{2}\vec{j}\right)$$
$$\boxed{\vec{v}_{P,arr} = -b\omega_0\vec{k}}$$
$$\vec{v}_{P} = \vec{v}_{P,rel} + \vec{v}_{P,arr}$$
$$\boxed{\vec{v}_{P} = -\frac{b\dot{\beta}}{2}\vec{i} - b\omega_0\vec{k} = -b\left(\frac{\dot{\beta}}{2}\vec{i} + \omega_0\vec{k}\right)}$$

(d) Os vetores das acelerações relativa ($\vec{a}_{P,rel}$), de arrastamento ($\vec{a}_{P,arr}$) e absoluta ($\vec{a}_P$) da partícula P:

$$\vec{a}_{P,rel} = \vec{a}_{Q,rel} + \vec{\alpha}_{rel} \wedge (P - Q) + \vec{\omega}_{rel} \wedge [\vec{\omega}_{rel} \wedge (P - Q)]$$

$$\vec{a}_{P,rel} = \vec{0} + \left(-\ddot{\beta}\vec{k}\right) \wedge \left(-\frac{b}{2}\vec{j}\right) + \left(-\dot{\beta}\vec{k}\right) \wedge \left[\left(-\dot{\beta}\vec{k}\right) \wedge \left(-\frac{b}{2}\vec{j}\right)\right]$$

$$\vec{a}_{P,rel} = -\frac{b\ddot{\beta}}{2}\vec{i} + \left(-\dot{\beta}\vec{k}\right) \wedge \left(-\frac{b\dot{\beta}}{2}\vec{i}\right)$$

$$\boxed{\vec{a}_{P,rel} = -\frac{b\ddot{\beta}}{2}\vec{i} + \frac{b\dot{\beta}^2}{2}\vec{j} = -\frac{b}{2}\left(\ddot{\beta}\vec{i} - \dot{\beta}^2\vec{j}\right)}$$

$$\vec{a}_{P,arr} = \vec{a}_{Q,arr} + \vec{\alpha}_{arr} \wedge (P - O) + \vec{\omega}_{arr} \wedge [\vec{\omega}_{arr} \wedge (P - O)]$$

$$\vec{a}_{P,arr} = \vec{0} + \vec{0} \wedge \left(b\vec{i} - \frac{b}{2}\vec{j}\right) + \left(\omega_0\vec{j}\right) \wedge \left[\left(\omega_0\vec{j}\right) \wedge \left(b\vec{i} - \frac{b}{2}\vec{j}\right)\right]$$

$$\vec{a}_{P,arr} = \left(\omega_0\vec{j}\right) \wedge \left(-\omega_0 b\vec{k}\right)$$

$$\boxed{\vec{a}_{P,arr} = -b\omega_0^2\vec{i}}$$

$$\vec{a}_{P,cor} = 2\,\vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{v}_{P,rel}$$

$$\vec{a}_{P,cor} = 2\left(\omega_0\vec{j}\right) \wedge \left(-\frac{b\dot{\beta}}{2}\vec{i}\right)$$

$$\boxed{\vec{a}_{P,cor} = b\omega_0\dot{\beta}\vec{k}}$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{P,rel} + \vec{a}_{P,arr} + \vec{a}_{P,cor}$$

$$\vec{a}_P = \left(-\frac{b\ddot{\beta}}{2}\vec{i} + \frac{b\dot{\beta}^2}{2}\vec{j}\right) + \left(-b\omega_0^2\vec{i}\right) + \left(b\omega_0\dot{\beta}\vec{k}\right)$$

$$\vec{a}_P = -b\left(\frac{\ddot{\beta}}{2} + \omega_0^2\right)\vec{i} + \frac{b\dot{\beta}^2}{2}\vec{j} + b\omega_0\dot{\beta}\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{a}_P = -b\left[\left(\frac{\ddot{\beta}}{2} + \omega_0^2\right)\vec{i} - \frac{\dot{\beta}^2}{2}\vec{j} - \omega_0\dot{\beta}\vec{k}\right]}$$

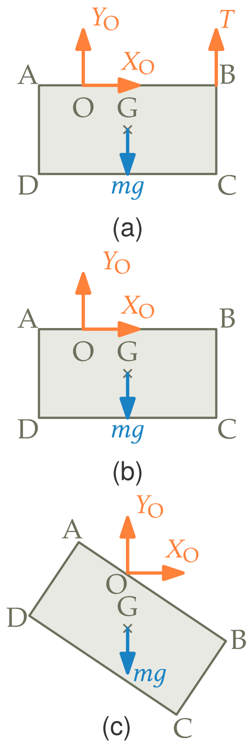
Questão 2 (3,0 pontos)

Distribuição de pontos:

- Diagramas de Corpo Livre: 0,2 ponto por cada DCL correto;
- Vetores velocidade angular ($\vec{\omega}$), vetores aceleração angular ($\vec{\alpha}$) e componentes de reação (X_O, Y_O): 0,1 ponto por cada expressão correta em cada um dos itens;
- Teoremas da dinâmica: 0,4 pela equação do Teorema da Quantidade de Movimento Angular no item (b); 0,4 pela equação do Teorema da Energia Cinética no item (c); 0,1 cada componente de $\vec{a}_G$ nos itens (b) e (c).

Resolução:

Os diagramas de corpo livre para cada uma das configurações estão indicados na figura.



(a) O sistema encontra-se em repouso e em equlíbrio: $\boxed{\vec{\omega}=\vec{0}}$ e $\boxed{\vec{\alpha}=\vec{0}}$.

As componentes de reação podem ser determinadas pelas equações de equilíbrio:

$$R_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{X_O = 0}$$

$$M_{Bz} = 0 \quad \Rightarrow \quad -3bY_O + 2bmg \quad \Rightarrow \quad \boxed{Y_O = \frac{2}{3}mg}$$

(b) O sistema parte do repouso: $\boxed{\vec{\omega}=\vec{0}}$.

Notando que: $J_{Oz} = J_{Gz} + m(x_G^2 + y_G^2) = \frac{5}{3}mb^2 + m(b^2+b^2) = \frac{11}{3}mb^2$, pode-se aplicar o Teorema da Quantidade de Movimento Angular com polo O para a determinação de $\vec{\alpha} = \alpha\vec{k}$:

$$J_{Oz}\alpha\vec{k} = M_{Oz}\vec{k} \quad \Rightarrow \quad \frac{11}{3}mb^2\alpha\vec{k} = -mgb\vec{k} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\alpha} = -\frac{3}{11}\frac{g}{b}\vec{k}}$$

As componentes de reação podem ser determinadas pelas equações do Teorema da Resultante:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_O + \vec{\alpha}\wedge(G-O) - |\vec{\omega}|^2(G-O) = \vec{0} - \frac{3}{11}\frac{g}{b}\vec{k}\wedge(b\vec{\imath} - b\vec{\jmath}) + \vec{0} = -\frac{3}{11}g(\vec{\imath}+\vec{\jmath})$$

$$m\vec{a}_G = \vec{R} = X_O\vec{\imath} + (Y_O - mg) \quad \Rightarrow \quad \boxed{X_O = -\frac{3}{11}mg} \quad \boxed{Y_O = \frac{8}{11}mg}$$

(c) Aplica-se o Teorema da Quantidade de Movimento Angular com polo O para a determinação de $\vec{\alpha} = \alpha\vec{k}$:

$$J_{Oz}\alpha\vec{k} = M_{Oz}\vec{k} = 0\vec{k} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\alpha} = \vec{0}}$$

Aplica-se o Teorema da Energia Cinética para a determinação de $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$:

$$\Delta T + \Delta V = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{2}J_{Oz}\omega^2 - 0\right) + \left(mg(-b\sqrt{2}) - mg(-b)\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\omega} = -\sqrt{\frac{6}{11}\frac{g}{b}(\sqrt{2}-1)}\,\vec{k}}$$

O sinal negativo da componente se deve ao fato de que, na primeira vez em que O e G ficam alinhados verticalmente, a placa gira no sentido horário.

As componentes de reação podem ser determinadas pelas equações do Teorema da Resultante:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_O + \vec{\alpha}\wedge(G-O) - |\vec{\omega}|^2(G-O) = \vec{0} + \vec{0} - \frac{6}{11}\frac{g}{b}(\sqrt{2}-1)\big(-b\sqrt{2}\vec{\jmath}\big) = \frac{6}{11}g(2-\sqrt{2})\vec{\jmath}$$

$$m\vec{a}_G = \vec{R} = X_O\vec{\imath} + (Y_O - mg) \quad \Rightarrow \quad \boxed{X_O = 0} \quad \boxed{Y_O = \frac{23-6\sqrt{2}}{11}mg}$$

Questão 3 (3,5 pontos)

Distribuição de pontos:

(a) 0,2 ponto por cada DCL correto;

(b) 0,2 ponto por cada expressão correta de aceleração;

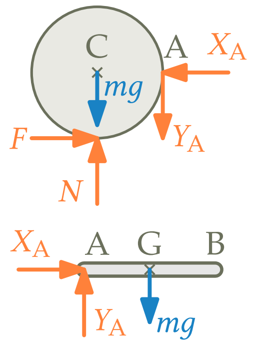
(c) 0,2 ponto por cada uma das 6 equações escrita corretamente;

(d) 0,1 ponto por cada expressão correta;

(e) 0,2 ponto por cada expressão correta;

(f) 0,3 ponto pela formulação; 0,2 ponto pela resposta correta;

Resolução:



(a) Diagramas indicados na figura ao lado.

(b) O centro do disco descreve um movimento retilíneo uniforme com $\vec{v}_C = -\omega_1 R\vec{\imath}$ (adotando $\vec{\omega}_1 = \omega_1\vec{k}$). Assim: $\boxed{\vec{a}_C = -\alpha_1 R\vec{\imath}}$.

Para o ponto A, utiliza-se a equação de campo de acelerações para o disco, assumindo que, na configuração indicada, o sistema está em repouso:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_C + \vec{\alpha}_1 \wedge (A-C) - |\vec{\omega}_1|^2(A-C) = -\alpha_1 R\vec{\imath} + \alpha_1\vec{k}\wedge R\vec{\imath} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\vec{a}_A = \alpha_1 R(-\vec{\imath}+\vec{\jmath})}$$

Analogamente, obtém-se $\vec{a}_G$ pela equação de campo de acelerações para a barra:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_A + \vec{\alpha}_2 \wedge (G-A) - |\vec{\omega}_2|^2(G-A) = \alpha_1 R(-\vec{\imath}+\vec{\jmath}) + \alpha_2\vec{k}\wedge R\vec{\imath} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\vec{a}_G = -\alpha_1 R\vec{\imath} + (\alpha_1+\alpha_2)R\vec{\jmath}}$$

(c) Abaixo, as equações (1) e (2) vêm da aplicação do Teorema da Resultante ao disco, a equação (3) vem da aplicação do Teorema da Quantidade de Movimento Angular ao disco com polo em C, as equações (4) e (5) vêm da aplicação do Teorema da Resultante à barra e a equação (6) vem da aplicação do Teorema da Quantidade de Movimento Angular à barra com polo em G:

$$m\vec{a}_C = \vec{R}^{[1]} \quad\Rightarrow\quad -m\alpha_1 R = F - X_A \tag{1}$$
$$0 = N - Y_A - mg \tag{2}$$
$$J_{Cz}\alpha_1\vec{k} = M_{Cz}^{[1]}\vec{k} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}mR^2\alpha_1 = (F - Y_A)R \tag{3}$$
$$m\vec{a}_G = \vec{R}^{[2]} \quad\Rightarrow\quad -m\alpha_1 R = X_A \tag{4}$$
$$m(\alpha_1+\alpha_2)R = Y_A - mg \tag{5}$$
$$J_{Gz}\alpha_2\vec{k} = M_{Cz}^{[2]}\vec{k} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{3}mR^2\alpha_2 = -Y_A R \tag{6}$$

(d) Utilizando as equações (4), (6), (1) e (2), nesta ordem, obtêm-se as expressões desejadas:

$$\boxed{X_A = -mR\alpha_1} \qquad \boxed{Y_A = -\frac{1}{3}mR\alpha_2} \qquad \boxed{F = -2mR\alpha_1} \qquad \boxed{N = mg - \frac{1}{3}mR\alpha_2}$$

(e) Substituindo as expressões anteriores nas equações (3) e (5), obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}mR^2\alpha_1 = mR^2\left(-2\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2\right) \\ mR(\alpha_1+\alpha_2) = mR\left(-\frac{1}{3}\alpha_2 - \frac{g}{R}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{2}\alpha_1 - \frac{1}{3}\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \frac{4}{3}\alpha_2 = -\frac{g}{R} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{\alpha}_1 = -\frac{1}{11}\frac{g}{R}\vec{k}} \quad \boxed{\vec{\alpha}_2 = -\frac{15}{22}\frac{g}{R}\vec{k}}$$

(f) Para manter a condição de rolamento sem escorregamento, é necessário que:

$$\frac{|F|}{N} \le \mu \quad\Rightarrow\quad \frac{|2mR\alpha_1|}{mg - \frac{1}{3}mR\alpha_2} = \frac{\frac{2}{11}mg}{mg + \frac{5}{22}mg} \le \mu \quad\Rightarrow\quad \boxed{\mu \ge \frac{4}{27}}$$