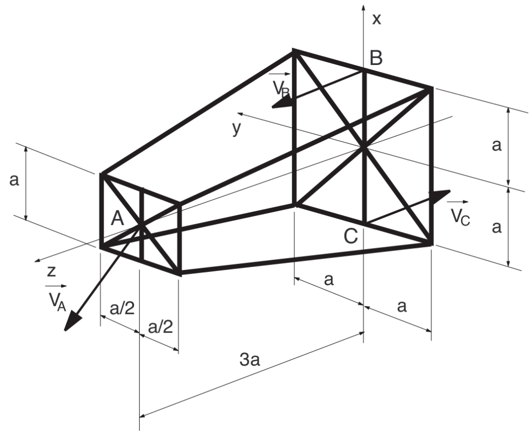
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 – MECÂNICA I – Prova 2 – 09 de Maio de 2019

Duração da Prova: 120 minutos (não é permitido usar quaisquer dispositivos eletrônicos)

Questão 1 (3,0 pontos). A plataforma esquematizada na figura foi instrumentada nos pontos A, B e C com a finalidade de registrar seu movimento. A velocidade desses pontos num instante vale:

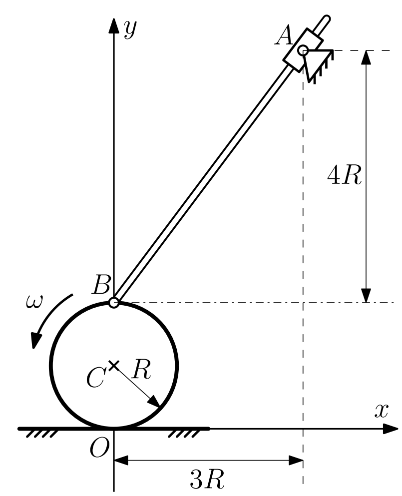
$$\vec{v}_A = -6v\vec{\imath} + v\vec{k}, \quad \vec{v}_B = 3v\vec{k} \quad \text{e} \quad \vec{v}_C = -v\vec{k}$$



Pede-se:

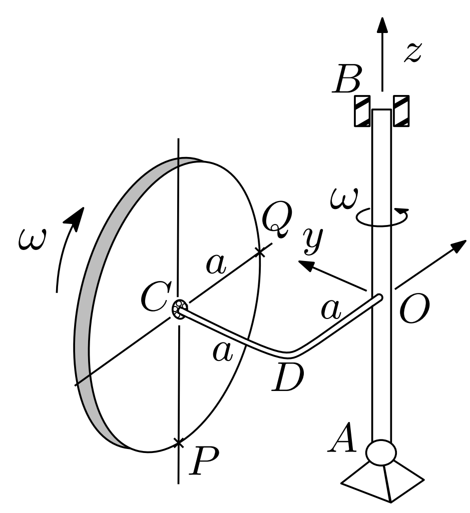
a) verificar que as velocidades $\vec{v}_A$ e $\vec{v}_B$ respeitam a condição de corpo rígido da plataforma.
b) determinar o vetor de rotação $\vec{\omega}$ da plataforma;

Questão 2 (3,5 pontos). O sistema ilustrado na figura é constituído por um disco de centro C e raio R e por uma barra rígida que tem uma de suas extremidades articulada ao ponto B na periferia do disco e que pode deslizar no interior da luva articulada em A. Assuma que o disco *rola sem escorregar* sobre a superfície plana fixa ilustrada com um vetor de rotação $\omega\vec{k}$ constante. Utilizando o sistema de coordenadas $Oxyz$ fornecido (versores $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$), pedem-se, em função dos parâmetros R e ω:



a) a velocidade $\vec{v}_C$ e a aceleração $\vec{a}_C$ do ponto C;
b) a velocidade $\vec{v}_B$ e a aceleração $\vec{a}_B$ do ponto B;
c) as coordenadas x e y do centro instantâneo de rotação da barra;
d) o vetor de rotação $\vec{\Omega}$ da barra;

Questão 3 (3,5 pontos). No sistema ilustrado na figura ao lado, a haste ODC, descreve um ato de rotação pura em torno do eixo fixo Oz, com velocidade angular $\omega\vec{k}$ constante. O disco de centro C e raio a, por sua vez, descreve uma rotação relativa à haste ODC com velocidade angular $\omega\vec{\jmath}$ constante. Adote o sistema de coordenadas $Oxyz$ solidário à haste ODC (versores $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$), com OD paralelo ao eixo Ox e DC paralelo ao eixo Oy. Para a configuração instantânea indicada, em que o segmento CP está paralelo ao eixo Oz, pedem-se, em função dos parâmetros a e ω:



a) o vetor de rotação absoluto do disco, $\vec{\Omega}$;
b) o vetor aceleração angular absoluta do disco, $\dot{\vec{\Omega}}$;
c) as velocidades relativa ($\vec{v}_{P,r}$), de arrastamento ($\vec{v}_{P,a}$) e absoluta ($\vec{v}_P$) do ponto P do disco;
d) as acelerações relativa ($\vec{a}_{P,r}$), de arrastamento ($\vec{a}_{P,a}$) e absoluta ($\vec{a}_P$) do ponto P do disco.

Av. Prof. Mello Moraes, 2231 – 05508-970 – São Paulo, SP – Brasil
TEL.: 55 11 3091-5355/5561/5570

Resolução da Questão 1 (3,0 pontos)

a) Propriedade fundamental do corpo rígido:

$$
\begin{aligned}
&\vec{v}_A \cdot (A - B) = \vec{v}_B \cdot (A - B) \\
&(-6v\vec{\imath} + v\vec{k}) \cdot (-a\vec{\imath} + 3a\vec{k}) = (3v\vec{k}) \cdot (-a\vec{\imath} + 3a\vec{k}) \\
&6av + 3av = 9av \quad \Rightarrow \quad 9av = 9av
\end{aligned}
$$

As velocidades de A e B respeitam a condição de corpo rígido da plataforma. (1,0)

b)

$$
\begin{aligned}
&\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \wedge (A - B) \\
&-6v\vec{\imath} + v\vec{k} = 3v\vec{k} + (\omega_x\vec{\imath} + \omega_y\vec{\jmath} + \omega_z\vec{k}) \wedge (-a\vec{\imath} + 3a\vec{k}) \\
&-6v\vec{\imath} - 2v\vec{k} = 3a\omega_y\vec{\imath} + (-3a\omega_x - a\omega_z)\vec{\jmath} + a\omega_y\vec{k} \\
&\qquad \Rightarrow \quad \omega_y = -\frac{2v}{a} \quad \text{e} \quad \omega_z = -3\omega_x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\vec{v}_B = \vec{v}_C + \vec{\omega} \wedge (B - C) \\
&3v\vec{k} = -v\vec{k} + \left(\omega_x\vec{\imath} - \frac{2v}{a}\vec{\jmath} - 3\omega_x\vec{k}\right) \wedge (2a\vec{\imath}) \\
&4v\vec{k} = -6a\omega_x\vec{\jmath} + 4v\vec{k} \\
&\qquad \Rightarrow \quad \omega_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_z = 0
\end{aligned}
$$

$$
\vec{\omega} = -\frac{2v}{a}\vec{\jmath}
$$

(2,0)

Resolução da Questão 2 (3,5 pontos)

a) Da condição de rolamento sem escorregamento do disco sobre a superfície plana fixa $\vec{v}_O = \vec{0}$. Assim:

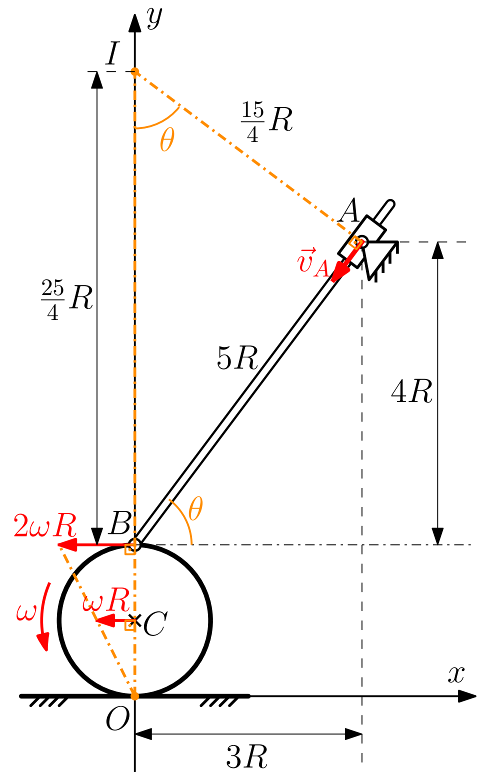
$$\vec{v}_C = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (C - O) = \vec{0} + \omega\vec{k} \wedge R\vec{\jmath} = -\omega R\vec{\imath} \qquad (0{,}5)$$

O ponto C realiza um movimento retilíneo (paralelo a $\vec{\imath}$) e uniforme (uma vez que o vetor de rotação do disco $\omega\vec{k}$ se mantém constante). Assim, $\vec{a}_C = \vec{0}$. (0,5)

b) Para o ponto B:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (B - O) = \vec{0} + \omega\vec{k} \wedge 2R\vec{\jmath} = -2\omega R\vec{\imath} \qquad (0{,}5)$$

$$\begin{aligned}\vec{a}_B &= \vec{a}_C + \dot{\vec{\omega}} \wedge (B - C) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (B - C)]\\ &= \vec{0} + \vec{0} + \omega\vec{k} \wedge [\omega\vec{k} \wedge R\vec{\jmath}] = -\omega^2 R\vec{\jmath} \qquad (0{,}5)\end{aligned}$$



c) A velocidade do ponto B é conhecida. Assim, pode-se traçar a linha BI, ortogonal a $\vec{v}_B$. Devido à presença da luva articulada, o ponto A da barra deve ter velocidade paralela à direção desta luva. Assim, pode-se traçar a linha AI, ortogonal a esta direção conhecida. O ponto I, intersecção das linhas BI e AI é o centro instantâneo de rotação da barra AB. (0,5)

A partir do diagrama esboçado na figura ao lado, pode-se afirmar que as coordenadas do ponto I no sistema Oxy são:

$$x = 0 \qquad \text{e} \qquad y = \frac{33}{4}R \qquad (0{,}5)$$

d) Considerando a construção geométrica do item anterior:

$$|\vec{\Omega}| = \frac{|\vec{v}_B|}{|B - I|} = \frac{2\omega R}{\frac{25}{4}R} = \frac{8}{25}\omega \qquad (0{,}3)$$

Também deste diagrama, verifica-se que o vetor de rotação da barra AB tem a direção e o sentido do versor $-\vec{k}$:

$$\vec{\Omega} = -\frac{8}{25}\omega\vec{k} \qquad (0{,}2)$$

Resolução da Questão 3 (3,5 pontos)

a) Identificando os vetores de rotação relativo e de arrastamento, tem-se:

$$\begin{cases} \vec{\omega}_r = \omega\vec{\jmath} \\ \vec{\omega}_a = \omega\vec{k} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \vec{\Omega} = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_a = \omega(\vec{\jmath} + \vec{k}) \qquad (0{,}5)$$

b) Identificando as acelerações angulares relativa e de arrastamento, tem-se:

$$\begin{cases} \vec{\alpha}_r = \vec{0} \\ \vec{\alpha}_a = \vec{0} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{\Omega}} = \vec{\alpha}_r + \vec{\alpha}_a + \vec{\omega}_a \wedge \vec{\omega}_r = \vec{0} + \vec{0} + \omega\vec{k} \wedge \omega\vec{\jmath} = -\omega^2\vec{\imath} \qquad (0{,}5)$$

c) Para o movimento relativo do ponto P, tem-se:

$$\vec{v}_{P,r} = \vec{v}_{C,r} + \vec{\omega}_r \wedge (P - C) = \vec{0} + \omega\vec{\jmath} \wedge (-a\vec{k}) = -\omega a\vec{\imath} \qquad (0{,}4)$$

Para o movimento de arrastamento do ponto P:

$$\vec{v}_{P,a} = \vec{v}_{O,a} + \vec{\omega}_a \wedge (P - O) = \vec{0} + \omega\vec{k} \wedge (-a\vec{\imath} + a\vec{\jmath} - a\vec{k}) = -\omega a(\vec{\imath} + \vec{\jmath}) \qquad (0{,}4)$$

Portanto, a velocidade absoluta do ponto P do disco é dada por:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{P,r} + \vec{v}_{P,a} = -\omega a(2\vec{\imath} + \vec{\jmath}) \qquad (0{,}2)$$

d) Para o movimento relativo do ponto P, tem-se:

$$\vec{a}_{P,r} = \vec{a}_{C,r} + \vec{\alpha}_r \wedge (P - C) + \vec{\omega}_r \wedge [\vec{\omega}_r \wedge (P - C)] = \vec{0} + \vec{0} + \omega\vec{\jmath} \wedge (-\omega a\vec{\imath}) = \omega^2 a\vec{k} \qquad (0{,}5)$$

Para o movimento de arrastamento do ponto P:

$$\vec{a}_{P,a} = \vec{a}_{O,a} + \vec{\alpha}_a \wedge (P - O) + \vec{\omega}_a \wedge [\vec{\omega}_a \wedge (P - O)] = \vec{0} + \vec{0} + \omega\vec{k} \wedge [-\omega a(\vec{\imath} + \vec{\jmath})] = \omega^2 a(\vec{\imath} - \vec{\jmath}) \qquad (0{,}5)$$

Portanto, a aceleração absoluta do ponto P do disco é dada por:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{P,r} + \vec{a}_{P,a} + 2\vec{\omega}_a \wedge \vec{v}_{P,r} = \omega^2 a\vec{k} + \omega^2 a(\vec{\imath} - \vec{\jmath}) + 2\omega\vec{k} \wedge (-\omega a\vec{\imath}) = \omega^2 a(\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + \vec{k}) \qquad (0{,}5)$$