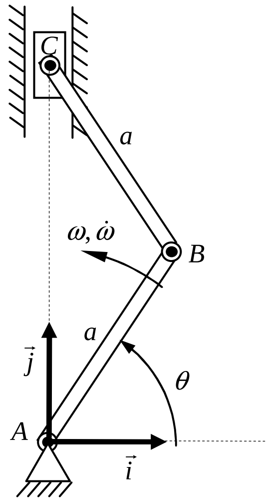
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 – MECÂNICA 1 (Reoferecimento) – Segunda Prova – 17 de maio de 2018 – Duração: 110 minutos
(não é permitido uso de celulares, *tablets*, calculadoras e dispositivos similares)

1ª Questão (3,5 pontos). O mecanismo da figura ao lado é composto pelas barras AB e BC, de mesmo comprimento a, articuladas entre si por meio de um pino B. A extremidade A da barra AB é vinculada a uma articulação fixa e a extremidade C da barra BC é ligada a um pistão que se move ao longo de uma guia vertical. Sabendo que, na configuração ilustrada, a barra AB gira com velocidade angular ω e aceleração angular $\dot{\omega}$, determine:

(a) a velocidade e a aceleração do ponto B;
(b) o centro instantâneo de rotação da barra BC;
(c) a velocidade angular ω_{BC} da barra BC e a velocidade do ponto C;
(d) a aceleração angular $\dot{\omega}_{BC}$ da barra BC e a aceleração do ponto C.



<u>Resolução</u>

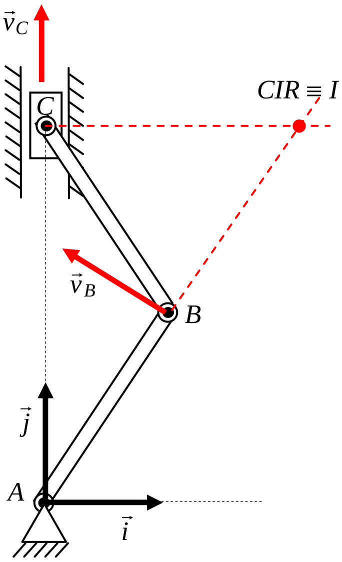
A velocidade do ponto $B \in AB$, é dada por:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \omega\vec{k} \wedge (B - A) = \vec{0} + \omega\vec{k} \wedge \left(a\cos\theta\vec{i} + a\sin\theta\vec{j}\right)$$
$$\Rightarrow \vec{v}_B = -\omega a\sin\theta\vec{i} + \omega a\cos\theta\vec{j}$$

A aceleração do ponto $B \in AB$, é dada por:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \dot{\omega}\vec{k} \wedge (B - A) + \omega\vec{k} \wedge \left[\omega\vec{k} \wedge (B - A)\right] = \vec{0} + \dot{\omega}\vec{k} \wedge \left(a\cos\theta\vec{i} + a\sin\theta\vec{j}\right) + \omega\vec{k} \wedge \left[\omega\vec{k} \wedge \left(a\cos\theta\vec{i} + a\sin\theta\vec{j}\right)\right]$$
$$\Rightarrow \vec{a}_B = -\dot{\omega}a\sin\theta\vec{i} + \dot{\omega}a\cos\theta\vec{j} + \omega\vec{k} \wedge \left[\omega a\left(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}\right)\right]$$
$$\Rightarrow \vec{a}_B = -\dot{\omega}a\sin\theta\vec{i} + \dot{\omega}a\cos\theta\vec{j} - \omega^2 a\left[\left(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}\right)\right]$$
$$\Rightarrow \vec{a}_B = -\left(\dot{\omega}\sin\theta + \omega^2\cos\theta\right)a\vec{i} + \left(\dot{\omega}\cos\theta - \omega^2\sin\theta\right)a\vec{j}$$

Resposta a: 1 ponto



Como as direções das velocidades dos pontos B e C da barra BC são conhecidas, o centro instantâneo de rotação de BC pode ser determinado graficamente, conforme indicado abaixo:

Da figura ao lado, obtêm-se:

$$y_C = |C - A| = 2a\sin\theta$$
$$x_C = 2|B - A|\cos\theta = 2a\cos\theta$$

de modo que a posição do centro instantâneo de rotação da barra BC é dada por:

$$\Rightarrow (CIR_{BC} - A) = 2a\cos\theta\vec{i} + 2a\sin\theta\vec{j}$$

Resposta b: 1 ponto

Para determinar a velocidade angular da barra BC aplicamos a equação do campo de velocidades à barra BC: referida aos pontos materiais $B \in BC$ e $I \equiv CIR_{BC}, I \in \textit{extensão material barra } BC,$:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{I \equiv CIR, I \in barraBC} + \omega_{BC}\vec{k} \wedge (B - I) = \vec{0} + \omega_{BC}\vec{k} \wedge \left(-a\cos\theta\vec{i} - a\sin\theta\vec{j}\right)$$

$$\Rightarrow \omega a\left(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}\right) = \omega_{BC}\vec{k} \wedge \left(-a\cos\theta\vec{i} - a\sin\theta\vec{j}\right)$$

$$\Rightarrow \omega a\left(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}\right) = \omega_{BC}\,a\left(\sin\theta\vec{i} - \cos\theta\vec{j}\right)$$

Da equação vetorial acima, conclui-se que a velocidade angular da barra BC é:

$$\omega_{BC} = -\omega$$

Para determinar a velocidade do ponto C aplicamos a equação do campo de velocidades para os pontos $B \in BC$ e $C \in BC$, ou seja:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \omega_{BC}\vec{k} \wedge (C - B) = \omega a\left(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}\right) - \omega\vec{k} \wedge \left(-a\cos\theta\vec{i} + a\sin\theta\vec{j}\right)$$
$$\Rightarrow \vec{v}_C = \omega a\left(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}\right) + \omega a\left(\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}\right)$$
$$\Rightarrow \vec{v}_C = 2\omega a\cos\theta\vec{j}$$

Resposta c: 1 ponto

A aceleração angular da barra BC é dada por:

$$\dot{\omega}_{BC} = \frac{d\omega_{BC}}{dt} = -\dot{\omega}$$

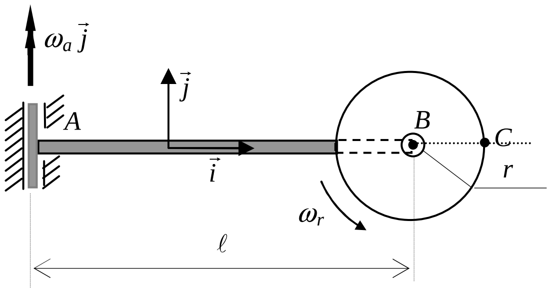
A aceleração do ponto $C \in BC$, é dada por:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \dot{\omega}_{BC}\vec{k} \wedge (C - B) + \omega_{BC}\vec{k} \wedge \left[\omega_{BC}\vec{k} \wedge (C - B)\right]$$
$$\Rightarrow \vec{a}_C = -\left(\dot{\omega}\sin\theta + \omega^2\cos\theta\right)a\vec{i} + \left(\dot{\omega}\cos\theta - \omega^2\sin\theta\right)a\vec{j} - \dot{\omega}\vec{k} \wedge a\left(-\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}\right) - \omega\vec{k} \wedge \left[-\omega\vec{k} \wedge a\left(-\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}\right)\right]$$
$$\Rightarrow \vec{a}_C = -\left(\dot{\omega}\sin\theta + \omega^2\cos\theta\right)a\vec{i} + \left(\dot{\omega}\cos\theta - \omega^2\sin\theta\right)a\vec{j} + \dot{\omega}a\left(\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}\right) - \omega\vec{k} \wedge \left[\omega a\left(\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}\right)\right]$$
$$\Rightarrow \vec{a}_C = -\left(\dot{\omega}\sin\theta + \omega^2\cos\theta\right)a\vec{i} + \left(\dot{\omega}\cos\theta - \omega^2\sin\theta\right)a\vec{j} + \dot{\omega}a\left(\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}\right) + \omega^2 a\left(+\cos\theta\vec{i} - \sin\theta\vec{j}\right)$$
$$\Rightarrow \vec{a}_C = -\left(\dot{\omega}\sin\theta + \omega^2\cos\theta\right)a\vec{i} + \left(\dot{\omega}\cos\theta - \omega^2\sin\theta\right)a\vec{j} + \dot{\omega}a\left(\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}\right) + \omega^2 a\left(+\cos\theta\vec{i} - \sin\theta\vec{j}\right)$$
$$\Rightarrow \vec{a}_C = 2a\left(\dot{\omega}\cos\theta - \omega^2\sin\theta\right)\vec{j}$$

Resposta d: ½ ponto

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica



2ª Questão (3,5 pontos). Uma barra delgada AB de comprimento ℓ gira em torno do eixo vertical com velocidade angular constante $\omega_a \vec{j}$. Em sua extremidade B está articulado um disco de raio r que gira em torno do eixo perpendicular ao plano da figura com velocidade angular constante $\omega_r \vec{k}$. Adotando a base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ solidária à barra AB, determinar, para a configuração indicada:

(a) o vetor rotação absoluta do disco;
(b) o vetor aceleração rotacional absoluta do disco;
(c) a velocidade absoluta do ponto C;
(d) a aceleração absoluta do ponto C.

<u>Resolução</u>

O vetor rotação absoluta do disco, é:

$$\vec{\omega} = \omega_a \vec{j} + \omega_r \vec{k}$$

Resposta a: ½ ponto

O vetor aceleração rotacional absolta do disco, é:

$$\dot{\vec{\omega}} = \dot{\omega}_a \vec{j} + \dot{\omega}_r \vec{k} + \vec{\omega}_a \wedge \vec{\omega}_r = \vec{0} + \vec{0} + \omega_a \vec{j} \wedge \omega_r \vec{k} = \omega_a \omega_r \vec{i}$$

Resposta b: ½ ponto

A velocidade absoluta do ponto C é dada por:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{\omega} \wedge (C - B) = [\vec{v}_A + \omega_a \vec{j} \wedge (B - A)] + \vec{\omega} \wedge (C - B)$$

Desenvolvendo-se a expressão acima, tem-se:

$$\vec{v}_C = [\vec{0} + \omega_a \vec{j} \wedge \ell \vec{i}] + (\omega_a \vec{j} + \omega_r \vec{k}) \wedge r\vec{i} = -\omega_a \ell \vec{k} - \omega_a r \vec{k} + \omega_r r \vec{j} = \omega_r r \vec{j} - \omega_a (\ell + r) \vec{k}$$

Resposta c: 1 ponto

A aceleração absoluta do ponto C é dada por:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \dot{\vec{\omega}} \wedge (C - B) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (C - B)] = \{\vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}}_a \wedge (B - A) + \vec{\omega}_A \wedge [\vec{\omega}_A \wedge (B - A)]\} + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (C - B)]$$

Desenvolvendo-se a expressão acima, tem-se:

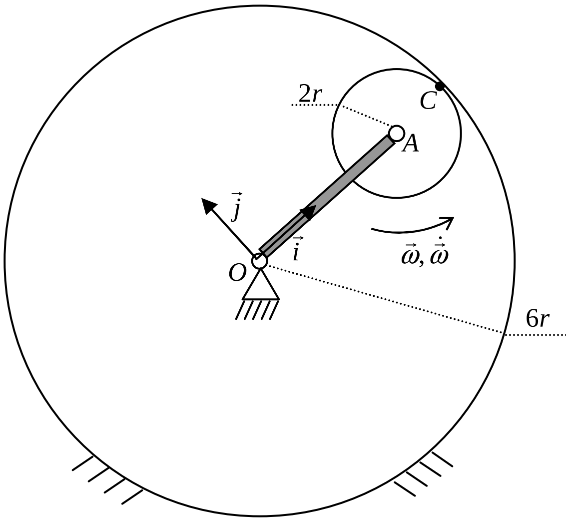
$$\vec{a}_C = \{\vec{0} + \vec{0} \wedge (B - A) + \omega_A \vec{j} \wedge [\omega_A \vec{j} \wedge \ell \vec{i}]\} + (\omega_a \vec{j} + \omega_r \vec{k}) \wedge [(\omega_a \vec{j} + \omega_r \vec{k}) \wedge r\vec{i}]$$

$$\Rightarrow \vec{a}_C = -\omega_a^2 \ell \vec{i} + (\omega_a \vec{j} + \omega_r \vec{k}) \wedge [-\omega_a r \vec{k} + \omega_r r \vec{j}] = -\omega_a^2 \ell \vec{i} - \omega_a^2 r \vec{i} - \omega_r^2 r \vec{i} = -[\omega_a^2 (\ell + r) + \omega_r^2 r] \vec{i}$$

Resposta d: 1½ ponto

3ª Questão (3,0 pontos). De acordo com a figura, o disco de raio $2r$ e centro A rola sem escorregar com velocidade angular ω e aceleração angular $\dot{\omega}$ sobre a pista interna do aro fixo de centro O e raio $6r$. Adotando a base $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ ligada à barra OA, pede-se:

(a) determinar a velocidade e a aceleração angulares da haste OA;
(b) determinar a velocidade e a aceleração do ponto C do disco de centro A;
(c) esboçar um trecho da trajetória descrita pelo ponto C do disco de centro A;
(d) responder (justificando) se é possível ou não definir o triedro de Frenet para os pontos da trajetória esboçada no item anterior correspondentes ao contato do ponto C com a pista interna do aro de centro O.



<u>Resolução</u>

Como o disco de centro A rola sem escorregar sobre a pista interna do aro fixo, o ponto C pertencente ao disco, na configuração indicada na figura, coincide com o C.I.R.do dico. Assim, a velocidade do ponto A, é dada por:

$$\vec{v}_A=\vec{v}_C+\omega\vec{k}\wedge(A-C)=\vec{0}+\omega\vec{k}\wedge(-2r\vec{i})=-2\omega r\vec{j}$$

Considerando A como um ponto da barra OA, tem-se:

$$\vec{v}_A=\vec{v}_O+\omega_{OA}\vec{k}\wedge(A-O)=\vec{0}+\omega_{OA}\vec{k}\wedge 4r\vec{i}=4\omega_{OA}r\vec{j}$$

Portanto, a velocidade angular da barra OA se obtém de forma imediata:

$$\vec{v}_A=4\omega_{OA}r\vec{j}=-2\omega r\vec{j}\Rightarrow\omega_{OA}=-\frac{\omega}{2}$$

A aceleração angular da barra OA é dada por:

$$\dot{\omega}_{OA}=\frac{d}{dt}\omega_{OA}=\frac{d}{dt}\left(-\frac{\omega}{2}\right)=-\frac{\dot{\omega}}{2}$$

Resposta a: 1 ponto

Conforme já mencionado, para a configuração indicada na figura, o ponto C pertencente ao disco coincide com o C.I.R. do disco. Logo, tem-se:

$$\vec{v}_C=\vec{0}$$

Para determinar a aceleração do ponto C, é necessário, antes, obter a aceleração do centro A do disco, ou seja:

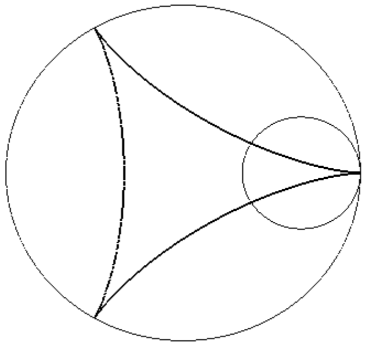
$$\vec{a}_A=\vec{a}_O+\dot{\omega}_{OA}\vec{k}\wedge(A-O)+\omega_{OA}\vec{k}\wedge\left[\omega_{OA}\vec{k}\wedge(A-O)\right]=\vec{0}-\frac{\dot{\omega}}{2}\vec{k}\wedge 4r\vec{i}-\frac{\omega}{2}\vec{k}\wedge\left[-\frac{\omega}{2}\vec{k}\wedge 4r\vec{i}\right]=-2\dot{\omega}r\vec{j}-\omega^2 r\vec{i}$$

A aceleração do ponto C do disco é dada por:

$$\vec{a}_C=\vec{a}_A+\dot{\omega}\vec{k}\wedge(C-A)+\omega\vec{k}\wedge\left[\omega\vec{k}\wedge(C-A)\right]=-2\dot{\omega}r\vec{j}-\omega^2 r\vec{i}+\dot{\omega}\vec{k}\wedge 2r\vec{i}+\omega\vec{k}\wedge\left(\omega\vec{k}\wedge 2r\vec{i}\right)=-\omega^2 r\vec{i}-2\omega^2 r\vec{i}=-3\omega^2 r\vec{i}$$

Resposta b: 1 ponto

	ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO Departamento de Engenharia Mecânica



A trajetória descrita por um ponto C qualquer da periferia do disco de centro A é destacada na figura ao lado. Característica do movimento sem rolamento de uma circunferência de raio r no interior de outra, de raio $R, R > r$, essa curva é denominada *hipociclóide*.

De acordo com o enunciado do problema, $R = 3r$, de modo que a trajetória de C irá apresentar 3 pontos singulares, correspondentes aos instantes em que a velocidade de C se anula. No entorno desses pontos, a trajetória apresenta singularidades denominadas *cúspides*.

Resposta c: ½ ponto

Conforme se pode observar na figura acima, nos pontos singulares que delimitam as cúspides da trajetória de C, não existem versores tangentes. Logo, o triedro de Frenet não é definido para esses pontos.

Resposta d: ½ ponto