ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

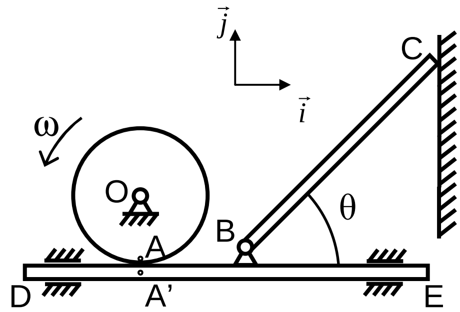
# PME 3100 – MECÂNICA I – Segunda Prova – 15 de maio de 2015

**Duração da Prova: 110 minutos (não é permitido uso de calculadoras)**

**1ª Questão (4,0 pontos)**

No sistema mostrado na figura, o disco de centro fixo *O* tem raio *R* e vetor de rotação $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$, constante. O disco rola sem escorregar em relação à barra *DE*, que tem liberdade para mover-se horizontalmente. A barra *BC* tem comprimento *L*, está articulada em *B* e desliza no ponto *C*, mantendo contato com a superfície vertical. Para o instante considerado, pede-se:

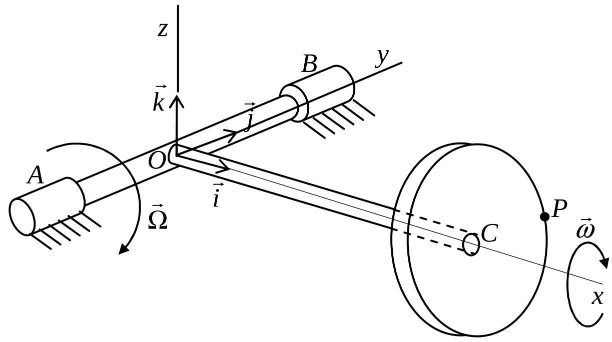
a) a velocidade do ponto *B*.
b) os centros instantâneos de rotação (*CIR*) do disco e da barra *BC*.
c) o vetor de rotação da barra *BC*.
d) a aceleração do ponto *A* pertencente ao disco e *A'* pertencente à barra *DE*.




**2ª Questão (4,0 pontos)**

No sistema mostrado na figura, a peça $AOBC$, com $OC = L$, gira em torno do eixo $AB$ com velocidade angular $\Omega\vec{j}$ constante, transportando em sua extremidade $C$ um disco de raio $R$ que gira com velocidade angular $-\omega\vec{i}$ ($\omega$ constante) em relação a $AOB$. Usando os versores $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, da base solidária ao referencial móvel $AOBC$, e sabendo que no instante considerado a posição do ponto $P$ do disco é dada por $(P - C) = R\,\vec{j}$, determinar:

(a) as velocidades relativa, de arrastamento e absoluta do ponto $P$;
(b) as acelerações relativa, de arrastamento, de Coriolis e absoluta do ponto $P$;
(c) o vetor rotação absoluta do disco;
(d) a aceleração rotacional absoluta do disco.




**3ª Questão (2,0 pontos)**

Um ponto $M$ percorre a curva descrita por

$$\begin{cases} x = a(1+\cos\theta)\cdot\cos\theta \\ y = a(1+\cos\theta)\cdot\sin\theta \\ z = \theta \end{cases}$$

de acordo com a lei horária $\theta = \frac{t}{2}$. Pede-se determinar, no instante $t = \frac{\pi}{2}$:

(a) a velocidade de $M$;
(b) a aceleração de $M$;
(c) os versores $\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}$ do triedro de Frenet em $M$.

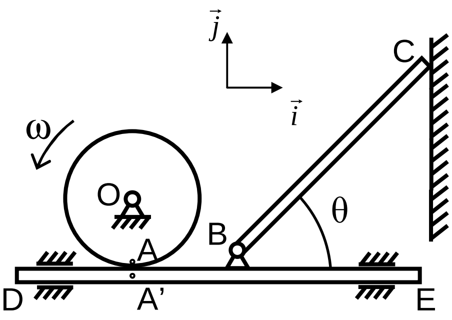
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

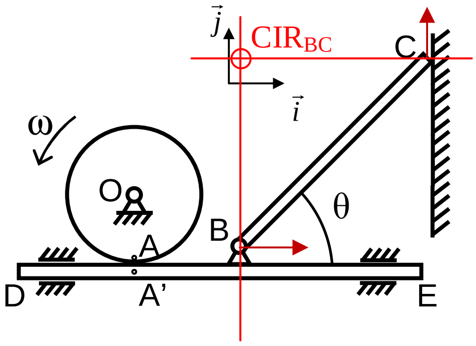
Departamento de Engenharia Mecânica

**1ª Questão (4,0 pontos)**

No sistema mostrado na figura, o disco de centro fixo *O* tem raio *R* e vetor de rotação $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$ , constante. O disco rola sem escorregar em relação à barra *DE*, que tem liberdade para mover-se horizontalmente. A barra *BC* tem comprimento *L*, está articulada em *B* e desliza no ponto *C*, mantendo contato com a superfície vertical. Para o instante considerado, pede-se:




a) a velocidade do ponto *B*.
b) os centros instantâneos de rotação (*CIR*) do disco e da barra *BC*.
c) o vetor de rotação da barra *BC*.
d) a aceleração do ponto *A* pertencente ao disco e *A'* pertencente à barra *DE*.




A barra *DE* apenas se translada, assim:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A = \vec{v}_O + \omega \vec{k} \wedge (A - O) = \vec{0} + \omega \vec{k} \wedge \left(-R\vec{j}\right) \Rightarrow \boxed{\vec{v}_B = \omega R \vec{i}}$$

O disco tem centro fixo *O* que portanto é o seu centro de rotação.

*CIR* da barra *BC* pode ser obtido graficamente como ilustrado.
Resulta em $\boxed{(CIR_{BC} - B) = Lsen\theta \vec{j}}$

Sendo assim podemos escrever:

$$\vec{v}_B = \omega_{BC}\, \vec{k} \wedge (B - CIR_{BC}) \Rightarrow \omega r \vec{i} = \omega_{BC}\, \vec{k} \wedge \left(-Lsen\theta \vec{j}\right) = \omega_{BC} Lsen\theta \vec{i} \Rightarrow \omega_{BC} = \frac{R}{Lsen\theta}\omega$$

$$\boxed{\vec{\omega}_{BC} = \frac{R}{Lsen\theta}\omega \vec{k}}$$

Podemos escrever para o disco:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \dot{\omega} \vec{k} \wedge (A - O) + \omega^2\, \vec{k} \wedge \left[\vec{k} \wedge (A - O)\right]$$

Sendo O fixo e $\omega$ constante, obtêm-se: $\vec{a}_O = \vec{0}$ e $\dot{\omega} = 0$.

Resulta:

$$\vec{a}_A = \vec{0} + \vec{0} + \omega^2\, \vec{k} \wedge \left[\vec{k} \wedge \left(-R\vec{j}\right)\right] \Rightarrow \boxed{\vec{a}_A = \omega^2 R \vec{j}}$$

Temos $\vec{v}_{A'} = \vec{v}_B = \omega R \vec{i}$ , pois a barra *DE* apenas se translada e sendo $\omega$ constante resulta $\vec{v}_{A'} = \vec{v}_B =$ constante.

Sendo assim $\boxed{\vec{a}_{A'} = \vec{0}}$.

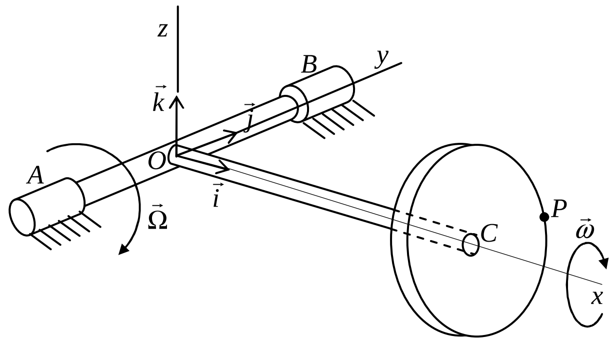
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

**2ª Questão** (**4,0 pontos**)

No sistema mostrado na figura, a peça $AOBC$, com $OC = L$, gira em torno do eixo $AB$ com velocidade angular $\Omega\vec{j}$ constante, transportando em sua extremidade $C$ um disco de raio $R$ que gira com velocidade angular $-\omega\vec{i}$ ($\omega$ constante) em relação a $AOB$. Usando os versores $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, da base solidária ao referencial móvel $AOBC$, e sabendo que no instante considerado a posição do ponto $P$ do disco é dada por $(P-C) = R\,\vec{j}$, determinar:




(e) as velocidades relativa, de arrastamento e absoluta do ponto $P$;
(f) as acelerações relativa, de arrastamento, de Coriolis e absoluta do ponto $P$;
(g) o vetor rotação absoluta do disco;
(h) a aceleração rotacional absoluta do disco.

No movimento relativo: $\vec{v}_{P,rel} = \vec{v}_{C,rel} - \omega\vec{i} \wedge (P-C) = \vec{0} - \omega\vec{i} \wedge (R\vec{j}) \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{P,rel} = \omega R\vec{k}}$

No movimento de arrastamento: $\vec{v}_{P,arr} = \vec{v}_O + \Omega\vec{j} \wedge (P-O) = \vec{0} + \Omega\vec{j} \wedge (L\vec{i} + R\vec{j}) \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{P,arr} = -\Omega L\vec{k}}$

A velocidade absoluta resulta em: $\vec{v}_P = \vec{v}_{P,arr} + \vec{v}_{P,rel} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_P = (\omega R - \Omega L)\vec{k}}$

No movimento relativo:
$$\vec{a}_{P,rel} = \vec{a}_{C,rel} + \dot{\omega}\vec{i} \wedge (P-C) + \omega^2\vec{i} \wedge [\vec{i} \wedge (P-C)] = \vec{0} + \vec{0} - \omega^2 R\vec{j} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{P,rel} = -\omega^2 R\vec{j}}$$

No movimento de arrastamento:
$$\vec{a}_{P,arr} = \vec{a}_O + \dot{\Omega}\vec{j} \wedge (P-O) + \Omega^2\vec{j} \wedge [\vec{j} \wedge (P-O)] = \vec{0} + \vec{0} - \Omega^2 L\vec{i} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{P,arr} = -\Omega^2 L\vec{i}}$$

A aceleração de Coriolis: $\vec{a}_{P,cor} = 2\vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{v}_{P,rel} = 2\Omega\vec{j} \wedge \omega R\vec{k} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{P,cor} = 2\Omega\omega R\vec{i}}$

O vetor de rotação absoluto do disco: $\vec{\omega}_{abs} = \vec{\omega}_{arr} + \vec{\omega}_{rel} \Rightarrow \boxed{\vec{\omega}_{abs} = \Omega\vec{j} - \omega\vec{i}}$

A aceleração rotacional absoluta do disco:
$$\dot{\vec{\omega}}_{abs} = \dot{\vec{\omega}}_{arr} + \dot{\vec{\omega}}_{rel} + \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{\omega}_{rel} = \vec{0} + \vec{0} + \Omega\vec{j} \wedge (-\omega\vec{i}) \Rightarrow \boxed{\dot{\vec{\omega}}_{abs} = \Omega\omega\vec{k}}$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

**3ª Questão (2,0 pontos)**

Um ponto $M$ percorre a curva descrita por

$$\begin{cases} x = a(1+\cos\theta)\cdot\cos\theta \\ y = a(1+\cos\theta)\cdot\sin\theta \\ z = \theta \end{cases}$$

de acordo com a lei horária $\theta = \frac{t}{2}$. Pede-se determinar, no instante $t = \frac{\pi}{2}$:

(d) a velocidade de $M$;
(e) a aceleração de $M$;
(f) os versores $\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}$ do triedro de Frenet em $M$.

A velocidade de $M$ em qualquer instante, é dada por:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \left(\frac{dx}{d\theta}\vec{i} + \frac{dy}{d\theta}\vec{j} + \frac{dz}{d\theta}\vec{k}\right)\cdot\frac{d\theta}{dt},$$

em que

$$\frac{dx}{d\theta} = -a\sin\theta + 2a(-\sin\theta)\cos\theta = -a\sin\theta - a\sin 2\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = a\cos\theta + a(-\sin\theta)\sin\theta + a\cos\theta\cos\theta = a\cos\theta - a\cos 2\theta$$

$$\frac{dz}{d\theta} = 1$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}$$

Resulta, portanto:

$$\vec{v} = -\frac{a}{2}(\sin\theta + \sin 2\theta)\vec{i} + \frac{a}{2}(\cos\theta - a\cos 2\theta)\vec{j} + \vec{k}$$

No instante $t = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$ e a velocidade de $M$ é:

$$\vec{v}\left(t = \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{a}{2}\left(\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{2}\right)\vec{i} + \frac{a}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - a\cos\frac{\pi}{2}\right)\vec{j} + \vec{k}$$

$$\therefore \vec{v}\left(t = \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{a}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{i} + a\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}\vec{k}$$

A aceleração de $M$ em qualquer instante, é:

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \left(\frac{dv_x}{d\theta}\vec{i} + \frac{dv_y}{d\theta}\vec{j} + \frac{dv_z}{d\theta}\vec{k}\right)\cdot\frac{d\theta}{dt},$$

em que

$$\frac{dv_x}{d\theta} = -\frac{a}{2}(\cos\theta - 2\cos 2\theta)$$

$$\frac{dv_y}{d\theta} = \frac{a}{2}(-\sin\theta + 2\sin 2\theta)$$

$$\frac{dv_z}{d\theta} = 0$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

Resulta, portanto:

$$\vec{\gamma} = \frac{a}{4}\left[-(\cos\theta + 2\cos 2\theta)\vec{i} + (-\sin\theta + 2\sin 2\theta)\vec{j}\right]$$

No instante $t = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$ e a aceleração de $M$ é:

$$\vec{\gamma}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{a}{4}\left[-\left(\cos\frac{\pi}{4} + 2\cos\frac{\pi}{2}\right)\vec{i} + \left(-\sin\frac{\pi}{4} + 2\sin\frac{\pi}{2}\right)\vec{j}\right]$$

$$\therefore \vec{\gamma}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{a}{4}\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{j}\right]$$

No instante $t = \frac{\pi}{2}$, o versor tangente do triedro de Frenet, é dado por:

$$\vec{\tau}(\pi/2) = \frac{\vec{v}(\pi/2)}{|v(\pi/2)|} = \frac{-\frac{a}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{i} + a\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}\vec{k}}{\sqrt{\left[-\frac{a}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]^2 + \left(a\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}}$$

Nesse mesmo instante, o versor binormal é dado por:

$$\vec{b}(\pi/2) = \frac{\vec{v}(\pi/2) \wedge \vec{\gamma}(\pi/2)}{|\vec{v}(\pi/2) \wedge \vec{\gamma}(\pi/2)|} = \frac{\left[-\frac{a}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{i} + a\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}\vec{k}\right] \wedge \left\{\frac{a}{4}\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{j}\right]\right\}}{\left|\left[-\frac{a}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{i} + a\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}\vec{k}\right] \wedge \left\{\frac{a}{4}\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{j}\right]\right\}\right|}$$

Conseqüentemente, o versor normal, nesse instante, é:

$$\vec{n}(\pi/2) = \vec{b}(\pi/2) \wedge \vec{\tau}(\pi/2)$$