ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

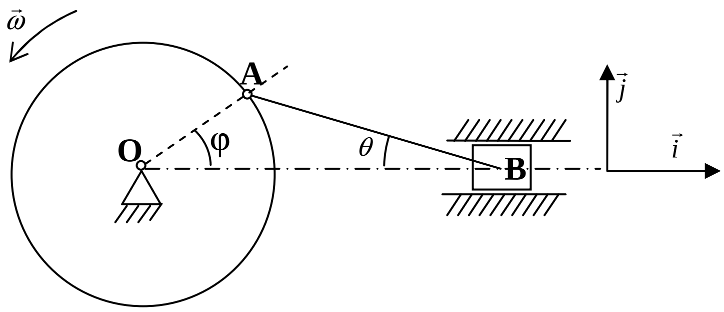
**PME 3100 - Mecânica A (Reoferecimento)**

**Segunda Prova- Duração 110 minutos – 13 de abril de 2014**

**1 - Não é permitido o uso de dispositivos eletrônicos, como calculadoras, ‘tablets’ e celulares.**

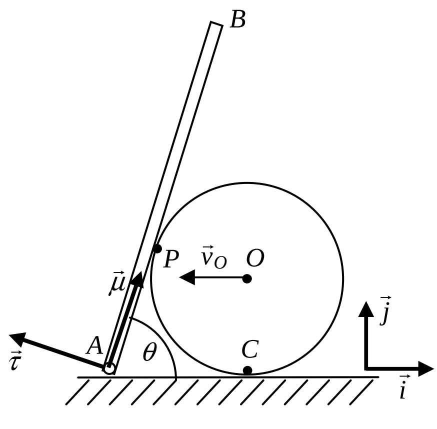
**QUESTÃO 1 (3,0 pontos).** A barra *AB*, de comprimento *l*, está articulada em *A* a um disco de raio *R* que gira com velocidade angular ω (constante), e em *B* a um pistão que se move ao longo direção horizontal. Para a configuração indicada na figura, pede-se determinar, em função de φ e θ:

(a) o centro instantâneo de rotação da barra;
(b) a velocidade angular da barra;
(c) a velocidade do ponto *B*;
(d) a aceleração angular da barra;
(e) a relação geométrica entre φ e θ.



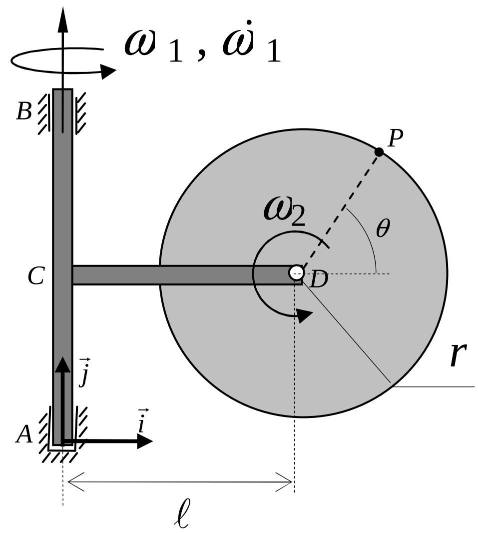

**QUESTÃO 2 (3,5 pontos).** O centro $O$ do disco de raio $r$ ilustrado na figura move-se com velocidade $v_O$ para a esquerda enquanto a barra $AB$ de comprimento $\ell$ gira ao redor de $A$. Sabendo-se que não há escorregamento em $C$, pede-se, em função de $v_O$ e $\theta$:

(a) a velocidade angular do disco;
(b) a velocidade absoluta do ponto $P$ do disco, em contato com a barra;
(c) a velocidade angular da barra.




**QUESTÃO 3 (3,5 pontos).** A peça $ABCD$ gira em torno do eixo $AB$ com velocidade angular $\omega_1$ e aceleração angular $\dot{\omega}_1$ enquanto, articulado em sua extremidade $D$, um disco de raio $r$ gira com velocidade angular $\omega_2$ constante. Nessas condições, pede-se determinar:

(a) os vetores rotação relativa, de arrastamento e absoluta do disco;
(b) o vetor aceleração rotacional absoluta do disco;
(c) as velocidades relativa, de arrastamento e absoluta do ponto $P$ do disco, indicado na figura;
(d) a aceleração absoluta do ponto $P$ .

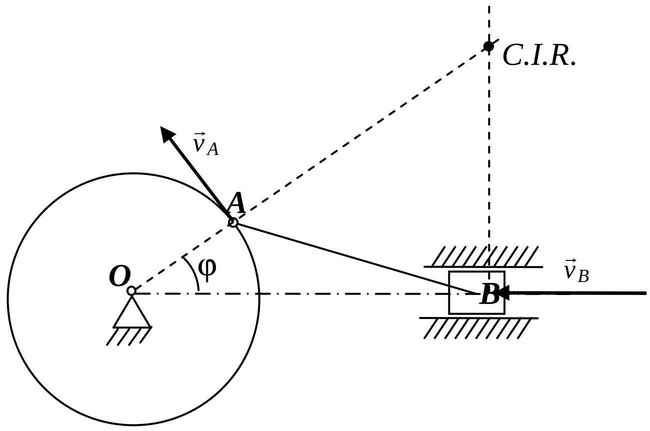


ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

**RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 1**

Como as direções das velocidades de *A* e de *B* são conhecidas, obtém-se a posição do C.I.R da barra conforme indicado na figura abaixo:




**Resposta a: ½ ponto**

Portanto, as coordenadas do C.I.R. da barra são:

$$x_C = R\cos\varphi + \ell\cos\theta \tag{1}$$

$$y_C = x_C\tan\varphi = R\sin\varphi + \ell\cos\theta\tan\varphi \tag{2}$$

A velocidade do ponto *A* da barra é:

$$\vec{v}_A = \omega\vec{k}\wedge(A-O) = \omega\vec{k}\wedge\left(R\cos\varphi\vec{i} + R\sin\varphi\vec{j}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{v}_A = \omega R\cos\varphi\vec{j} - \omega R\sin\varphi\vec{i} \tag{3}$$

Aplicando-se a equação fundamental da cinemática entre o ponto *A* da barra e o ponto *I* de sua extensão paterial coincidente com seu C.I.R, obtém-se:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{I\equiv CIR\,,\,I\in barra} + \Omega\vec{k}\wedge(A - C.I.R.) =$$

$$= \Omega\vec{k}\wedge\left[\left(R\cos\varphi\vec{i} + R\sin\varphi\vec{j}\right) - \left(R\cos\varphi + \ell\cos\theta\right)\vec{i} - \left(R\sin\varphi + \ell\cos\theta\tan\varphi\right)\vec{j}\right]$$

$$\Rightarrow \omega R\cos\varphi\vec{j} - \omega R\sin\varphi\vec{i} = -\Omega\ell\cos\theta\vec{j} + \Omega\ell\cos\theta\tan\varphi\vec{i}$$

$$\begin{cases} -\omega R\sin\varphi = \Omega\ell\cos\theta\tan\varphi \\ \omega R\cos\varphi = -\Omega\ell\cos\theta \end{cases} \tag{4}$$

Utilizando-se quaisquer das duas equações acima, obtém-se:

$$\Omega = -\frac{R\cos\varphi}{l\cos\theta}\omega \tag{5}$$

**Resposta b: 1 ponto**

A velocidade do ponto *B* pode ser obtida a partir de:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{I\equiv CIR, I\in barra} + \Omega\vec{k} \wedge (B - C.I.R.) =$$
$$= -\Omega\vec{k}\left[(R\cos\varphi + \ell\cos\theta)\vec{i} - (R\cos\varphi + \ell\cos\theta)\vec{i} - (R\sin\varphi + \ell\cos\theta\tan\varphi)\vec{j}\right]$$
$$\Rightarrow \vec{v}_B = -\frac{R\cos\varphi}{l\cos\theta}\omega\vec{k}\left[-(R\sin\varphi + \ell\cos\theta\tan\varphi)\vec{j}\right]$$

$$\Rightarrow \vec{v}_B = -\frac{R\cos\varphi}{l\cos\theta}(R\sin\varphi + \ell\cos\theta\tan\varphi)\omega\vec{i}$$

**Resposta c: ½ ponto**

A aceleração angular da barra é obtida derivando-se a expressão de $\Omega$, ou seja:

$$\dot{\Omega} = \frac{R}{\ell}\omega\left[\frac{-\sin\varphi\dot{\varphi}\cos\theta - \cos\varphi(-\sin\theta\dot{\theta})}{\cos^2\theta}\right] \tag{6}$$

Notemos que:

$$\dot{\varphi} = \omega \tag{7}$$

Os ângulos $\theta$ e $\varphi$ são relacionados por:

$$\sin\theta = \frac{R}{\ell}\sin\varphi \tag{8}$$

**Resposta e: ½ ponto**

Derivando-se a expressão (8), obtém-se:

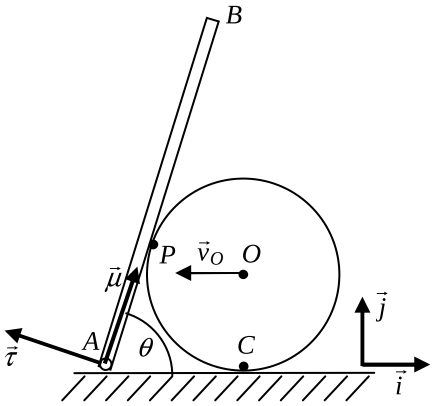
$$\cos\theta\dot{\theta} = \frac{R}{\ell}\cos\varphi\dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{R\cos\varphi\omega}{\ell\cos\theta} \tag{9}$$

Substituindo-se (7), (8) e (9) na equação (6), obtém-se:

$$\dot{\Omega} = \frac{R}{\ell}\omega\left[\frac{-\sin\varphi\omega\cos\theta + \cos\varphi\frac{R}{\ell}\sin\varphi\frac{R\cos\varphi\omega}{\ell\cos\theta}}{\cos^2\theta}\right]$$
$$\Rightarrow \dot{\Omega} = \left(-\frac{R\sin\varphi}{\ell\cos\theta} + \frac{R^3\sin\varphi\cos^2\varphi}{\ell^3\cos^3\theta}\right)\omega^2 \tag{10}$$

**Resposta d: ½ ponto**

**RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 2**




Como o movimento do disco é de rolamento sem escorregamento, o ponto *C* coincide com o *C.I.R.* do disco. Logo, a velocidade do centro *O* é dada por:

$$\vec{v}_O = -v_O\vec{i} = \vec{v}_C + \omega\vec{k} \wedge (O - C) = \vec{0} + \omega\vec{k} \wedge r\vec{j} = -\omega r\vec{i}$$

$$\therefore \omega = \frac{v_O}{r}$$

**Resposta a: ½ ponto**

A velocidade absoluta do ponto *P* do disco pode ser obtida a partir de:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \omega\vec{k} \wedge (P - O) = -v_O\vec{i} + \frac{v_O}{r}\vec{k} \wedge r\vec{\tau} = -v_O\vec{i} - v_O\vec{\mu}$$

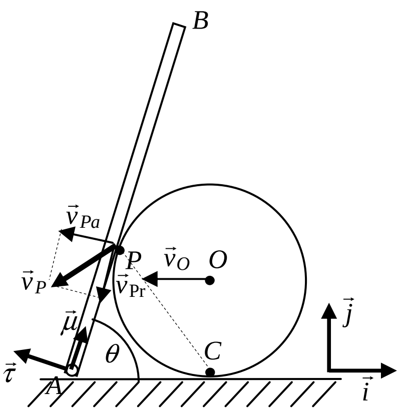
Utilizando-se exclusivamente a base $\vec{\mu}\vec{\tau}\vec{k}$, a expressão acima assume a forma:

$$\vec{v}_P = -v_O\left[(\vec{i}\cdot\vec{\mu})\vec{\mu} + (\vec{i}\cdot\vec{\tau})\vec{\tau}\right] - v_O\vec{\mu} = -v_O\left[\cos\theta\vec{\mu} + \cos(90+\theta)\vec{\tau}\right] - v_O\vec{\mu}$$

$$\therefore \vec{v}_P = -v_O\,(i + \cos\,\theta)\vec{\mu} + v_O\,\sin\,\theta\vec{\tau}$$

**Resposta b: 1 ponto**

Para responder à terceira questão, utilizaremos a figura abaixo:



Notemos que o ponto geométrico de contacto $P' \equiv P$ move-se com velocidade relativa $\vec{v}_{P'r}$ ao longo da direção $AB$ rumo ao ponto $A$, ao mesmo tempo em que é arrastado pelo disco com velocidade de arrastamento $\vec{v}_{P'a}$, normal à barra. Em outras palavras, a velocidade do ponto $P'' \equiv P, P'' \in barra$ é:

$$\vec{v}_{P''} = (\vec{v}_P \cdot \vec{\tau})\vec{\tau} = \{[-v_O(i+\cos\theta)\vec{\mu} + v_O \sin\theta\vec{\tau}] \cdot \vec{\tau}\}\vec{\tau}$$
$$\therefore \vec{v}_{P''} = v_O \sin\theta\vec{\tau}$$

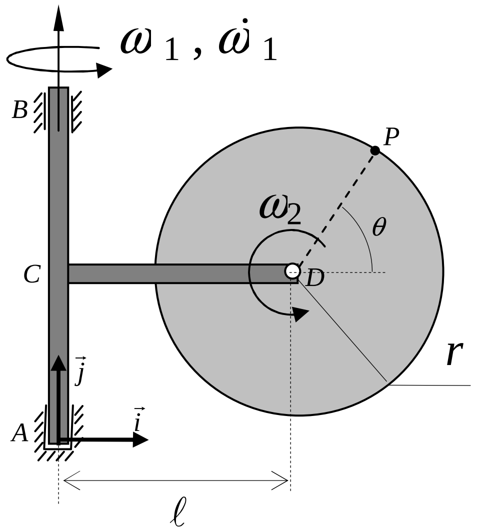
Dessa forma, a velocidade angular da barra AB é obtida a partir de:

$$\vec{v}_{P''} = v_O \sin\theta\vec{\tau} = \vec{v}_A + \omega_{AB}\vec{k} \wedge (P'' - A) = \vec{0} + \omega_{AB}\vec{k} \wedge \frac{r}{\tan(\theta/2)}\vec{\mu} = \omega_{AB}\frac{r}{\tan(\theta/2)}\vec{\tau}$$
$$\therefore \omega_{AB} = \frac{v_O}{r}\sin\theta\tan\frac{\theta}{2}$$

**Resposta c: 1½ ponto**

**RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 3**

Para o disco do mecanismo ilustrado na figura abaixo,




os vetores rotação relativa, rotação de arrastamento e rotação absoluta são dados, respectivamente, por:

$$\vec{\omega}_r = \omega_2\vec{k} ,$$

$$\vec{\omega}_a = \omega_1\vec{j} ,$$

$$\vec{\omega} = \omega_1\vec{j} + \omega_2\vec{k}$$

**Resposta a: ½ ponto**

O vetor aceleração rotacional absoluta do disco é dado por:

$$\dot{\vec{\omega}} = \dot{\vec{\omega}}_r + \dot{\vec{\omega}}_a + \dot{\vec{\omega}}_c = \vec{0} + \dot{\omega}_1 \vec{j} + \omega_1 \vec{j} \wedge \omega_2 \vec{k} = \dot{\omega}_1 \vec{j} + \omega_1 \omega_2 \vec{i}$$

**Resposta b: ½ ponto**

As componentes relativa, de arrastamento e absoluta do ponto $P$ do disco são obtidas conforme indicado a seguir:

$$\vec{v}_{\mathrm{Pr}} = \vec{v}_D \Big|_{\vec{i}\vec{j}\vec{k}\ fixos} + \omega_2 \vec{k} \wedge (P - D) = \vec{0} + \omega_2 \vec{k} \wedge \left(r\cos\theta \vec{i} + r\sin\theta \vec{j}\right) = \omega_2 r \cos\theta \vec{j} - \omega_2 r \sin\theta \vec{i}$$

$$\vec{v}_{Pa} = \vec{v}_C + \omega_1 \vec{j} \wedge (P - C) = \vec{0} + \omega_1 \vec{j} \wedge \left(r\cos\theta \vec{i} + r\sin\theta \vec{j} + \ell \vec{i}\right) = -\omega_1 (\ell + r\cos\theta)\vec{k}$$

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{\mathrm{Pr}} + \vec{v}_{Pa} = -\omega_2 r \sin\theta \vec{i} + \omega_2 r \cos\theta \vec{j} - \omega_1 (\ell + r\cos\theta)\vec{k}$$

**Resposta c: 1 ponto**

Como a aceleração do ponto $D$ é dada por

$$\vec{a}_D = \vec{a}_C + \dot{\vec{\omega}}_1 \wedge (D - C) + \vec{\omega}_1 \wedge [\vec{\omega}_1 \wedge (D - C)] = \vec{0} + \dot{\omega}_1 \vec{j} \wedge \ell \vec{i} + \omega_1 \vec{j} \wedge \left[\omega_1 \vec{j} \wedge r\left(\cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j}\right)\right] = -\dot{\omega}_1 \ell \vec{k} - \omega_1^2 r \cos\theta \vec{i}$$

Utilizando-se o resultado anterior, determina-se a aceleração absoluta do ponto $P$ a partir de:

$$\begin{aligned}
\vec{a}_P &= \vec{a}_D + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P - D) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P - D)] = \\
&= -\dot{\omega}_1 \ell \vec{k} - \omega_1^2 r \cos\theta \vec{i} + \left(\dot{\omega}_1 \vec{j} + \omega_1 \omega_2 \vec{i}\right) \wedge r\left(\cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j}\right) + \left(\omega_1 \vec{j} + \omega_2 \vec{k}\right) \wedge \left[\left(\omega_1 \vec{j} + \omega_2 \vec{k}\right) \wedge r\left(\cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j}\right)\right] \\
&= -r\left(2\omega_1^2 + \omega_2^2\right)\cos\theta \vec{i} - \omega_2^2 r \sin\theta \vec{j} - \left(\dot{\omega}_1 \ell + \dot{\omega}_1 r \cos\theta + 2\omega_1 \omega_2 r \sin\theta\right)\vec{k}
\end{aligned}$$

**Resposta d: 1½ ponto**