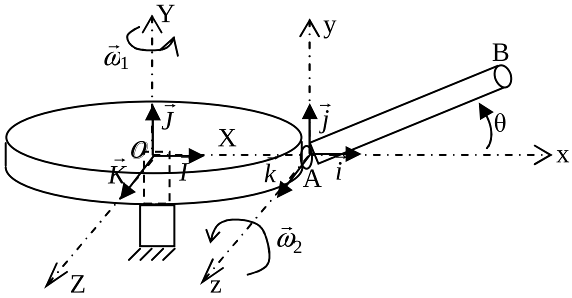
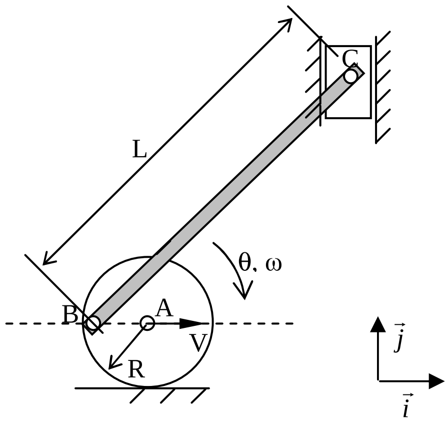
PME 2100 – Mecânica A (reoferecimento 2012) - P2 - 18/5/2012. Duração: 100 minutos
Prof. Dr. Flavius Portella Ribas Martins e Prof. Dr. Flávio Celso Trigo

QUESTÃO 1 (3,5 pontos): Na figura ao lado, o sistema de coordenadas *OXYZ* possui orientação fixa em relação a um referencial inercial. Por outro lado, o sistema de coordenadas *Axyz* é solidário ao disco de centro *O* e raio *R* que gira com velocidade angular constante $\vec{\omega}_1 = \omega_1 \vec{J}$ em torno de um eixo vertical *OY*, por *O*. No instante mostrado, o tubo *AB* (comprimento *L* e diâmetro desprezível), articulado ao disco por um pino *A*, gira com velocidade angular de módulo constante $\omega_2 \vec{k}$ em relação ao eixo *Az*. Para a posição indicada na figura determinar, em função de R, L, ω_1, ω_2 e θ, e expressando as grandezas vetoriais utilizando os versores do sistema *Axyz*:



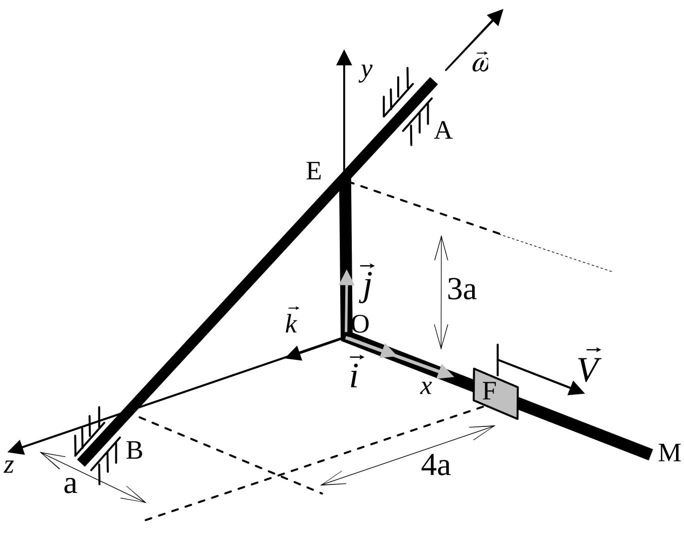
(a) o vetor rotação instantânea $\vec{\Omega}$ (absoluta) do tubo *AB*;
(b) o vetor aceleração instantânea $\dot{\vec{\Omega}}$ (absoluta) do tubo *AB*;
(c) a velocidade absoluta do ponto *B*;
(d) a aceleração absoluta do ponto *B*.

QUESTÃO 2 (3,5 pontos): Considere o mecanismo da figura ao lado, em que um disco de raio *R* rola **com escorregamento** no contato com um plano fixo. A velocidade angular do disco é $\vec{\omega} = -(V/2R)\vec{k}$, e a velocidade de seu centro A, $\vec{V}_A = V\vec{i}$, ambas constantes. O ponto B do disco está articulado a uma barra *BC* de comprimento *L* e cuja extremidade *C* está articulada a um bloco que pode se mover apenas na direção vertical. Nessas condições, pedem-se:



(a) a velocidade do ponto C e velocidade angular da barra BC;
(b) a aceleração do ponto B;
(c) o CIR do disco de centro A (graficamente e analiticamente).

QUESTÃO 3 (3,0 pontos): Uma peça rígida é formada pelas barras AB, EO e OM, sendo sustentada por mancais em A e B. No instante mostrado, é conhecido o módulo da velocidade angular, ω (constante), e sua orientação espacial, conforme a figura. No mesmo instante, a luva F desliza em relação à barra OM com velocidade de módulo constante *V*. São conhecidas todas as dimensões indicadas. Utilizando o sistema de coordenadas Oxyz solidário à peça pedem-se, para este instante:



(a) expressar o vetor velocidade angular, $\vec{\omega}$, em função dos parâmetros fornecidos;
(b) as velocidades absoluta, relativa e de arrastamento de F;
(c) as acelerações relativa, de arrastamento e de Coriolis de F.

RESOLUÇÃO DA PROVA

QUESTÃO 1.

Identificando os movimentos
- relativo: barra em relação ao disco;
- arrastamento: disco em relação a um referencial fixo;

tem-se:

(a) 0,5 pontos e (b) 0,5 + 0,5 pontos

$$\vec{\Omega} = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_a = \omega_2 \vec{k} + \omega_1 \vec{j}$$

$$\dot{\vec{\Omega}} = \dot{\vec{\omega}}_r + \dot{\vec{\omega}}_a + \vec{\omega}_a \wedge \vec{\omega}_r = \vec{0} + \vec{0} + \omega_1 \vec{j} \wedge \omega_2 \vec{k}$$

$$\dot{\vec{\Omega}} = \omega_1 \omega_2 \vec{i}$$

(c) 1 ponto

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{B,r} + \vec{v}_{B,a}$$

$$\vec{v}_{B,r} = \vec{v}_{A,r} + \omega_2 \vec{k} \wedge (B - A) = \vec{0} + \omega_2 \vec{k} \wedge L(\cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j})$$

$$\vec{v}_{B,r} = \omega_2 L(-\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j})$$

$$\vec{v}_{B,a} = \vec{v}_O + \omega_1 \vec{j} \wedge (B - O) = \omega_1 \vec{j} \wedge \left[(R + L\cos\theta)\vec{i} + L\sin\theta \vec{j}\right]$$

$$\vec{v}_{B,a} = -\omega_1 (R + L\cos\theta)\vec{k}$$

$$\vec{v}_B = \omega_2 L(-\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j}) - \omega_1 (R + L\cos\theta)\vec{k}$$

(d) 1 ponto

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{B,r} + \vec{a}_{B,a} + \vec{a}_{B,C}$$

$$\vec{a}_{B,r} = \vec{a}_{A,r} + \dot{\vec{\omega}}_2 \wedge (B - A) + \vec{\omega}_2 \wedge \left[\vec{\omega}_2 \wedge (B - A)\right]$$

$$\vec{a}_{B,r} = \vec{0} + \vec{0} + \omega_2 \vec{k} \wedge \left[\omega_2 \vec{k} \wedge L(\cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j})\right] = \omega_2^2 L(-\cos\theta \vec{i} - \sin\theta \vec{j})$$

$$\vec{a}_{B,a} = \vec{a}_{A,a} + \dot{\vec{\omega}}_1 \wedge (B - A) + \vec{\omega}_1 \wedge \left[\vec{\omega}_1 \wedge (B - A)\right]$$

$$\vec{a}_{B,a} = -\omega_1^2 R\vec{i} + \vec{0} + \omega_1 \vec{j} \wedge \left[\omega_1 \vec{j} \wedge L(\cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j})\right] = -\omega_1^2 (R + L\cos\theta)\vec{i}$$

$$\vec{a}_{B,C} = 2\omega_1 \vec{j} \wedge \vec{v}_{B,r} = 2\omega_1 \vec{j} \wedge \omega_2 L(-\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j}) = 2\omega_1 \omega_2 L\sin\theta \vec{k}$$

QUESTÃO 2.

(a) 1,5 pontos

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{BC} \wedge (C - B) \Rightarrow v_C \vec{j} = \vec{v}_B + \omega_{BC} \vec{k} \wedge L(\cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j})$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (B - A) = V\vec{i} - \frac{V}{2R}\vec{k} \wedge (-R\vec{i}) = V(\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j})$$

$$\therefore v_C \vec{j} = V(\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}) + L\omega_{BC}(\cos\theta \vec{j} - \sin\theta \vec{i})$$

$$\vec{i} : 0 = V - L\omega_{BC}\sin\theta \Rightarrow \omega_{BC} = \frac{V}{L\sin\theta} \Rightarrow \vec{\omega}_{BC} = \frac{V}{L\sin\theta}\vec{k}$$

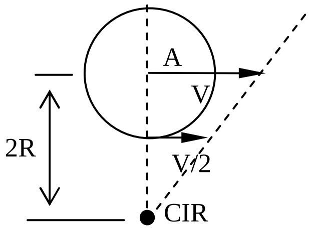
$$\vec{j} : v_C = \frac{V}{2} + L\frac{V}{L\sin\theta}\cos\theta \Rightarrow \vec{v}_C = V\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\tan\theta}\right)\vec{j}$$

(b) 1 ponto

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \wedge (B-A) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (B-A)] = \vec{0} + \vec{0} + \left(-\frac{V}{2R}\vec{k}\right) \wedge \left(-\frac{V}{2R}\vec{k} \wedge (-R\vec{j})\right)$$

$$\vec{a}_B = \frac{V^2}{4R}\vec{i}$$

(c) 1 ponto



$$\vec{v}_A = \vec{v}_{CIR} + \vec{\omega} \wedge (A - CIR) = \vec{0} + \left(-\frac{V}{2R}\vec{k}\right) \wedge |(A - CIR)|\vec{j}$$

$$V\vec{i} = \frac{V}{2R}|(A - CIR)|\vec{i} \Rightarrow |(A - CIR)| = 2R \therefore (A - CIR) = 2R\vec{j}$$

QUESTÃO 3.

(a) 0,5 pontos

De acordo com a figura,

$$\vec{\omega} = \frac{1}{5}\omega(3\vec{j} - 4\vec{k})$$

(b) 1 ponto

$$\vec{v}_F = \vec{v}_{F,r} + \vec{v}_{F,a}$$

$$\vec{v}_{F,r} = V\vec{i};$$

$$\vec{v}_{F,a} = \vec{v}_E + \vec{\omega} \wedge (F - E) = \vec{0} + \frac{1}{5}\omega(3\vec{j} - 4\vec{k}) \wedge \left[a\vec{i} - 3a\vec{j}\right]$$

$$\vec{v}_{F,a} = -\frac{\omega a}{5}\left(12\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}\right)$$

(c) 1,5 pontos

$$\vec{a}_F = \vec{a}_{F,r} + \vec{a}_{F,a} + \vec{a}_{F,C}$$

$$\vec{a}_{F,r} = \vec{0}$$

$$\vec{a}_{F,a} = \vec{a}_E + \dot{\vec{\omega}} \wedge (F - E) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (F - E)]$$

$$\vec{a}_{F,a} = \vec{0} + \vec{0} + \frac{1}{5}\omega(3\vec{j} - 4\vec{k}) \wedge \left[\frac{1}{5}\omega(3\vec{j} - 4\vec{k}) \wedge (a\vec{i} - 3a\vec{j})\right]$$

$$\vec{a}_{F,a} = \frac{1}{5}\omega(3\vec{j} - 4\vec{k}) \wedge \left[-\frac{\omega a}{5}\left(12\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}\right)\right] = \frac{\omega^2 a}{25}\left[-25\vec{i} + 48\vec{j} + 36\vec{k}\right]$$

$$\vec{a}_{F,C} = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{F,r} = 2\frac{1}{5}\omega(3\vec{j} - 4\vec{k}) \wedge V\vec{i}$$

$$\vec{a}_{F,C} = \frac{2\omega V}{5}(-4\vec{j} - 3\vec{k})$$