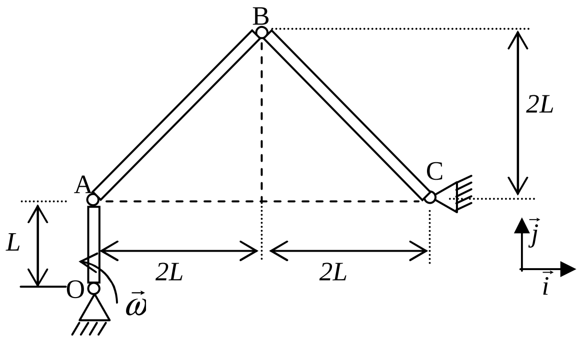
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 2100 – MECÂNICA A (Reoferecimento 2010) P2 – 14/5/2010 – Duração: 100 minutos.
Docentes responsáveis: Prof. Dr. Flávio Celso Trigo / Prof. Dr. Flavius Portella Ribas Martins

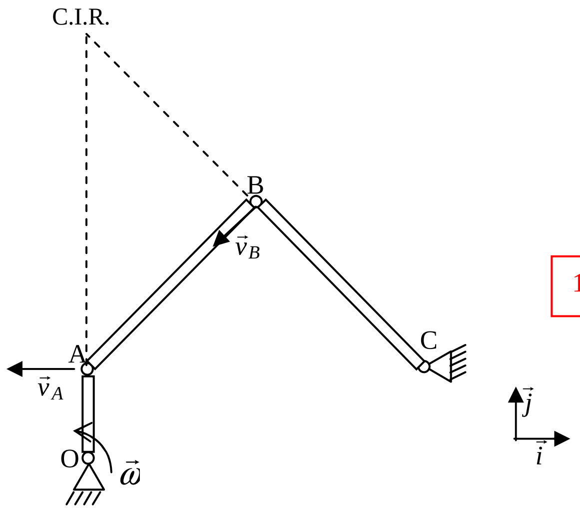
RESOLUÇÃO DA PROVA P2



QUESTÃO 1 (3 pontos): No mecanismo plano de 3 barras indicado na figura, a barra *AB* está articulada por meio de pinos à barra *OA*, que gira com velocidade angular ω constante em torno do ponto *O* fixo, e à barra *BC*, que gira em torno do ponto *C* fixo. Para a configuração indicada, em que a barra *OA* tem a direção do versor $\boldsymbol{j}$, determinar:
(a) o centro instantâneo de rotação da barra *AB*;
(b) a velocidade angular da barra *AB*;
(c) a velocidade angular da barra *BC*;
(d) a velocidade do ponto médio da barra *AB*.

<u>SOLUÇÃO</u>

Como as direções dos pontos *A* e *B* da barra *AB* são conhecidas, a posição do *C.I.R.* é determinada graficamente conforme indicado na figura abaixo.



1-a: posição do C.I.R. (1,0)

A velocidade do ponto *A* pertencente à barra *OA* é dada por:

$$\vec{v}_A = \omega\vec{k} \wedge L\vec{j} = -\omega L\vec{i}$$

Notando que a distância entre o *C.I.R.* e o ponto *A* é *4L*, ou seja,

$$(A - C.I.R.) = -4L\vec{j}$$

a velocidade do ponto *A* pertencente à barra *AB* se expressa como:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{C.I.R.} + \omega_{AB}\vec{k} \wedge \left(-4L\vec{j}\right) = -\omega L\vec{i}$$

Logo,

$\vec{\omega}_{AB} = -\frac{\omega}{4}\vec{k}$

1-b: Velocidade angular da barra AB (1,0)

A velocidade do ponto *B* pertencente à barra *AB* é dada por:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{C.I.R.} + \vec{\omega}_{AB} \wedge (B - C.I.R.) = -\frac{\omega}{4}\vec{k} \wedge \left(2L\vec{i} - 2L\vec{j}\right) = -\frac{\omega L}{2}\vec{i} - \frac{\omega L}{2}\vec{j}$$

Logo, para a velocidade do ponto *B* pertencente à barra *BC*, tem-se:

$$\vec{v}_B = \omega_{BC}\vec{k} \wedge \left(-2L\vec{i} + 2L\vec{j}\right) = -\frac{\omega L}{2}\vec{i} - \frac{\omega L}{2}\vec{j}$$

Resolvendo-se a equação acima, obtém-se:

$$\omega_{BC}\left(-2L\vec{j} - 2L\vec{i}\right) = \omega\left(-\frac{L}{2}\vec{i} - \frac{L}{2}\vec{j}\right) \Rightarrow \vec{\omega}_{BC} = \frac{\omega}{4}\vec{k}$$

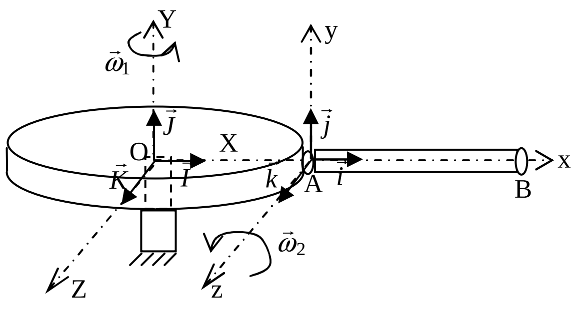
1-c: Velocidade angular da barra BC (0,5)

A velocidade do ponto médio *M* da barra *AB* é dada por:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{AB} \wedge (M - A) = -\omega L\vec{i} - \frac{\omega}{4}\vec{k} \wedge \left(L\vec{i} + L\vec{j}\right) = -\omega L\vec{i} - \frac{\omega L}{4}\vec{j} + \frac{\omega L}{4}\vec{i} = -\frac{3\omega L}{4}\vec{i} - \frac{\omega L}{4}\vec{j}$$

1-d: Velocidade do ponto médio da barra AB (0,5)

QUESTÃO 2 (3,5 pontos): O tubo *AB*, de comprimento *L* e diâmetro desprezível, gira com velocidade angular ω_2 segundo o eixo *Az*, articulado por um pino *A* ao disco de raio *R* e espessura desprezível, que, por sua vez, gira em torno do eixo *OY* com velocidade angular ω_1. Para a configuração indicada na figura, determinar:



(a) o vetor rotação instantânea (absoluta) do tubo *AB*;
(b) o vetor aceleração instantânea (absoluta) do tubo *AB*;
(c) a velocidade absoluta do ponto *B*;
(d) a aceleração absoluta do ponto *B*;
(e) supondo que uma formiga situada sobre o ponto *B* caminhe sobre o tubo em direção ao ponto *A* com velocidade de módulo constante v_F, determinar sua velocidade absoluta e sua aceleração absoluta.

SOLUÇÃO

O vetor rotação instantânea do tubo AB é:

$\vec{\omega} = \omega_1\vec{j} + \omega_2\vec{k}$

2-a: Vetor rotação instantânea do tubo AB (0,5)

O vetor aceleração angular instantânea do tubo AB é:

$\dot{\vec{\omega}} = \dot{\vec{\omega}}_1 + \dot{\vec{\omega}}_2 + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}_2 = \vec{0} + \vec{0} + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}_2 = \omega_1\vec{j} \wedge \omega_2\vec{k} = \omega_1\omega_2\vec{i}$

2-b: Vetor aceleração angular instantânea do tubo AB (0,5)

A velocidade absoluta do ponto *B* é:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (B - A) = \omega_1 \vec{j} \wedge (A - O) + \left(\omega_1 \vec{j} + \omega_2 \vec{k}\right) \wedge (B - A)$$

$$\Rightarrow \vec{v}_B = \omega_1 \vec{j} \wedge R\vec{i} + \left(\omega_1 \vec{j} + \omega_2 \vec{k}\right) \wedge L\vec{i} = -\omega_1 R\vec{k} - \omega_1 L\vec{k} + \omega_2 L\vec{j} = -\omega_1 (R + L)\vec{k} + \omega_2 L\vec{j}$$

2-c: Velocidade absoluta do ponto *B (1,0)*

A aceleração absoluta do ponto *B* é:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \wedge (B - A) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (B - A)] = \vec{\omega}_1 \wedge [\vec{\omega}_1 \wedge (A - O)] + \left(-\omega_1\omega_2 \vec{i}\right) \wedge (B - A) + \left(\omega_1 \vec{j} + \omega_2 \vec{k}\right) \wedge \left[\left(\omega_1 \vec{j} + \omega_2 \vec{k}\right) \wedge (B - A)\right]$$

$$\Rightarrow \vec{a}_B = \omega_1 \vec{j} \wedge \left(\omega_1 \vec{j} \wedge R\vec{i}\right) + \omega_1\omega_2 \vec{i} \wedge L\vec{i} + \left(\omega_1 \vec{j} + \omega_2 \vec{k}\right) \wedge \left[\left(\omega_1 \vec{j} + \omega_2 \vec{k}\right) \wedge L\vec{i}\right] = -\omega_1^2 R\vec{i} - \omega_1^2 L\vec{i} - \omega_2^2 L\vec{i} = -\left[\omega_1^2 (R + L) + \omega_2^2 L\right]\vec{i}$$

2-d: Aceleração absoluta do ponto *B (1,0)*

A velocidade absoluta da formiga situada sobre o ponto *B*, é:

$$\vec{v}_{F,abs} = \vec{v}_F + \vec{v}_B = -v_F \vec{i} - \omega_1 (R + L)\vec{k} + \omega_2 L\vec{j}$$

2-e1: Velocidade absoluta da formiga (0,3)

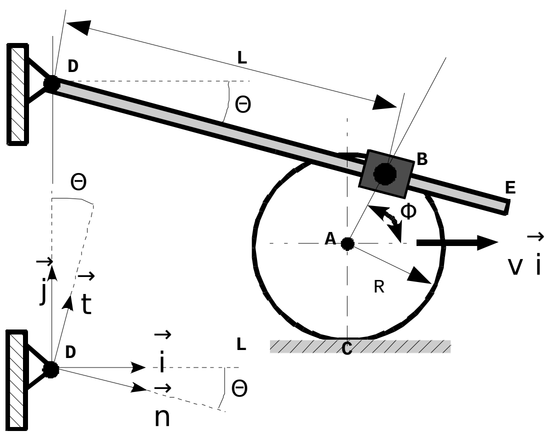
A aceleração absoluta da formiga situada sobre o ponto *B*, é:

$$\vec{a}_F = \vec{a}_B + 2\omega \wedge \left(-v_F \vec{i}\right) = -\left[\omega_1^2 (R + L) + \omega_2^2 L\right]\vec{i} + 2\left(\omega_1 \vec{j} + \omega_2 \vec{k}\right) \wedge \left(-v_F \vec{i}\right) = -\left[\omega_1^2 (R + L) + \omega_2^2 L\right]\vec{i}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_F = -\left[\omega_1^2 (R + L) + \omega_2^2 L\right]\vec{i} + 2(\omega_1 + \omega_2) v_F \left(\vec{k} + \vec{j}\right)$$

2-e2: Aceleração absoluta da formiga (0,2)

Questão 3 (3,5 pontos): No mecanismo da figura, a barra rígida *DE* é articulada em *D*, ponto fixo. Um disco de centro *A* e raio *R* desloca-se sem escorregar com velocidade constante v**i** sobre uma superfície plana. Por um pino em *B* acopla-se uma luva que desliza axialmente ao longo da barra *DE* em seu interior. Considere dados os sistemas de referência ***Dijk***, de orientação fixa e ***Dntk*** solidário à barra *DE*, e o ângulo Θ existente entre eles. No instante mostrado o ângulo Φ é tal que sen(Φ)=4/5 e cos(Φ)=3/5. Nestas condições, pedem-se:



(a) o vetor rotação $\vec{\omega}$ do disco de centro A, a velocidade absoluta do pino *B* e a aceleração absoluta do ponto de contato com o solo, ponto *C*;

(b) considerando o movimento de *B* relativo à barra *DE*, determinar as velocidades relativa e de arrastamento do pino *B*, fornecendo as respostas no sistema de coordenadas correspondente ao referencial ***Dntk***;

(c) o vetor rotação $\vec{\Omega}$ da barra *DE* e a aceleração de Coriolis do pino *B*.

SOLUÇÃO

a) (1,0) Relação entre os sistemas de coordenadas:

$$\vec{i} = \cos\theta\vec{n} + \text{sen}\,\theta\vec{t}$$

$$\vec{j} = -\text{sen}\,\theta\vec{n} + \cos\theta\vec{t}$$

Determinação de $\vec{\omega}$:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_C + \vec{\omega} \wedge (A - C) \Rightarrow v\vec{i} = \vec{0} + \omega\vec{k} \wedge R\vec{j} \Rightarrow \omega = -\frac{v}{R} \Rightarrow \boxed{\vec{\omega} = -\frac{v}{R}\vec{k}}$$

Determinação da velocidade absoluta de B:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (B - A) \Rightarrow \vec{v}_B = v\vec{i} + \left(-\frac{v}{R}\vec{k}\right) \wedge R(\cos\Phi\vec{i} + \operatorname{sen}\Phi\vec{j}) \Rightarrow$$

$$\vec{v}_B = v\vec{i} + \frac{v}{5}(4\vec{i} - 3\vec{j}) \Rightarrow \vec{v}_B = \frac{v}{5}(9\vec{i} - 3\vec{j})$$

Determinação da aceleração de C:

derivando-se a equação da velocidade absoluta de A em relação ao tempo obtemos:

$$\frac{d}{dt}(\vec{v}_A) = \frac{d}{dt}(\vec{v}_C) + \frac{d}{dt}[\vec{\omega} \wedge (A - C)] \Rightarrow$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_C + \dot{\vec{\omega}} \wedge (A - C) + \vec{\omega} \wedge (\vec{v}_A - \vec{v}_C)$$

Como a velocidade do disco é constante,

$$\vec{a}_A = \vec{0} \qquad e \qquad \dot{\vec{\omega}} = \vec{0} \qquad \therefore$$

$$\vec{0} = \vec{a}_C + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega}(A - C)] \Rightarrow$$

$$\vec{a}_C = \omega^2 R\vec{j}$$

b) (1,0) Determinação das velocidades relativa e de arrastamento de B

Do item anterior,

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{B,\text{abs}} = \frac{v}{5}(9\vec{i} - 3\vec{j}) = \frac{9v}{5}(\cos\theta\vec{n} + \operatorname{sen}\theta\vec{t}) - \frac{3v}{5}(-\operatorname{sen}\theta\vec{n} + \cos\theta\vec{t}) \Rightarrow$$

$$\vec{v}_B = \frac{3v}{5}(3\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)\vec{n} + \frac{3v}{5}(-\cos\theta + 3\operatorname{sen}\theta)\vec{t}$$

Portanto, como

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{B,\text{rel}} + \vec{v}_{B,\text{arr}} \therefore \vec{v}_{B,\text{rel}} = \frac{3v}{5}(3\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)\vec{n}$$

$$\vec{v}_{B,\text{arr}} = \frac{3v}{5}(-\cos\theta + 3\operatorname{sen}\theta)\vec{t}$$

c)
A rotação da barra é imposta pela parcela de arrastamento da velocidade de B. Para a barra DE, temos:

$$\vec{v}_{B,\text{arr}} = \vec{v}_D + \vec{\Omega} \wedge (B - D) = \vec{0} + \Omega\vec{k} \wedge L\vec{n} \Rightarrow$$

$$\frac{3v}{5}(-\cos\theta + 3\operatorname{sen}\theta)\vec{t} = \Omega L\vec{t} \Rightarrow \Omega = \frac{3v}{5L}(-\cos\theta + 3\operatorname{sen}\theta) \therefore \vec{\Omega} = \frac{3v}{5L}(-\cos\theta + 3\operatorname{sen}\theta)\vec{k} \qquad (1,0)$$

A aceleração de Coriolis de B em seu movimento relativo à barra DE é

$$\vec{a}_{B,\mathrm{Cor}} = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{B,\mathrm{rel}} = 2\frac{3v}{5L}(-\cos\theta + 3\mathrm{sen}\,\theta)\vec{k} \wedge \frac{3v}{5}(3\cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta)\vec{n}$$

$$\vec{a}_{B,\mathrm{Cor}} = \frac{18v^2}{25L}(-3\cos^2\theta + 3\mathrm{sen}^2\theta + 8\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta) \Rightarrow$$

$$\vec{a}_{B,\mathrm{Cor}} = \frac{18v^2}{25L}\left(-3\cos 2\theta + 4\mathrm{sen}2\theta\right)\vec{t}$$

(0,5)