ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

MECÂNICA A – PME 2100 - Segunda Prova – 16 de maio de 2002

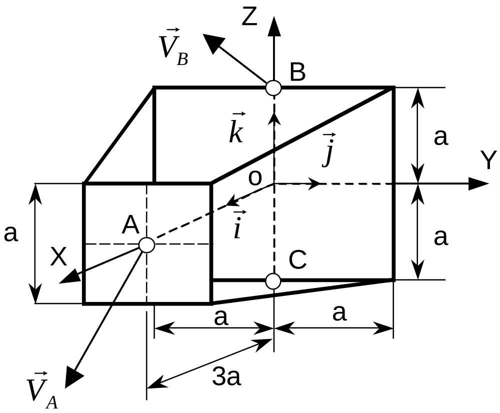
Duração da Prova: 100 minutos (não é permitido uso de calculadoras)

seminário ou exercício em classe ou lista de exercícios (1,0 ponto)

1ª Questão (3,0 pontos)

Foram medidas as velocidades dos pontos **A**, **B** e **C** da estrutura em forma de tronco de pirâmide esquematizada na figura ao lado. As velocidades medidas num instante de movimento foram: $\vec{V}_B = 4V\vec{i} - V\vec{j}$,

$\vec{V}_A = 2V\vec{i} - (V/2)\vec{j} - 6V\vec{k}$ e $\vec{V}_C = 0$. Pede-se:

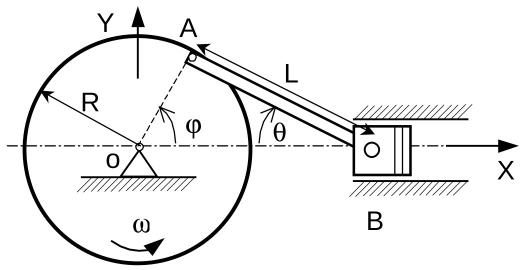


a) verificar se as velocidades dos pontos **A** e **B** respeitam a condição de corpo rígido da estrutura.

b) determinar as componentes do vetor velocidade angular da estrutura $\vec{\omega} = \omega_x\vec{i} + \omega_y\vec{j} + \omega_z\vec{k}$

2ª Questão (3,0 pontos)

A biela **AB** de comprimento **L** e articulada em **A**, liga o disco de centro em **O** com o pistão articulado em **B**. O disco gira a uma velocidade angular ω constante e o pistão desliza sobre a guia na direção X. Pede-se determinar:



a) graficamente centro instantâneo de rotação da biela **AB**

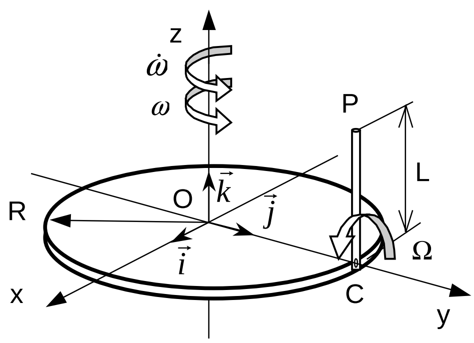
b) a relação entre os ângulos **φ** e **θ**

c) a velocidade angular $\boldsymbol{\Omega}$ da biela **AB**

d) a velocidade e aceleração do ponto **B**.

3ª Questão (3,0 pontos)

O disco de raio **R** gira em torno do eixo vertical com aceleração angular $\dot{\omega}$ conforme mostrado na figura. A barra **PC** de comprimento **L** e articulada no disco em **C**, gira com velocidade constante **Ω**. Expressando nas coordenadas O*ijk* solidárias ao disco, pede-se determinar:



a) velocidades relativa e absoluta dos pontos **C** e **P**

b) a aceleração absoluta do ponto **C**

c) a aceleração relativa e absoluta do ponto **P**

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

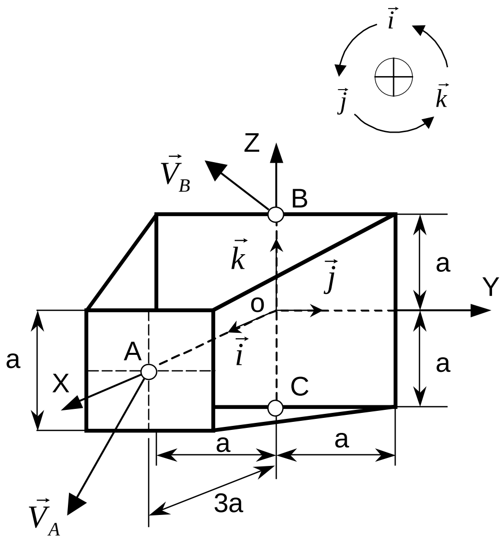
Departamento de Engenharia Mecânica

MECÂNICA A – PME 2100 - Segunda Prova – 16 de maio de 2002

Duração da Prova: 100 minutos (não é permitido uso de calculadoras)
seminário ou exercício em classe ou lista de exercícios (1,0 ponto)

Resolução da Prova

1ª Questão (3,0 pontos)



Foram medidas as velocidades dos pontos **A**, **B** e **C** da estrutura em forma de tronco de pirâmide esquematizada na figura ao lado. As velocidades medidas num instante de movimento foram: $\vec{V}_B = 4V\vec{i} - V\vec{j}$,
$\vec{V}_A = 2V\vec{i} - (V/2)\vec{j} - 6V\vec{k}$ e $\vec{V}_C = 0$. Pede-se:

a) verificar se as velocidades dos pontos **A** e **B** respeitam a condição de corpo rígido da estrutura.
b) Determinar as componentes do vetor velocidade angular da estrutura $\vec{\omega} = \omega_x\vec{i} + \omega_y\vec{j} + \omega_z\vec{k}$

Resolução:

a) Verificação da propriedade fundamental de corpo rígido:

$\vec{V}_A \cdot (A-B) = \vec{V}_B \cdot (A-B)$

$\vec{V}_A = 2V\vec{i} - (V/2)\vec{j} - 6V\vec{k}$ $\quad \vec{V}_B = 4V\vec{i} - V\vec{j}$ $\quad (A-B) = 3a\vec{i} - a\vec{k}$

$[2V\vec{i} - (V/2)\vec{j} - 6V\vec{k}]\cdot(3a\vec{i} - a\vec{k}) = (4V\vec{i} - V\vec{j})\cdot(3a\vec{i} - a\vec{k})$ $\quad \boxed{6Va + 6Va = 12Va}$ (1,0 ponto)

Portanto as velocidades respeitam a condição de corpo rígido da estrutura.

b) Vetor velocidade angular:

$\vec{V}_A = \vec{V}_C + \vec{\omega} \wedge (A-C)$

$2V\vec{i} - (V/2)\vec{j} - 6V\vec{k} = 0 + (\omega_x\vec{i} + \omega_y\vec{j} + \omega_z\vec{k}) \wedge (3a\vec{i} + a\vec{k})$

$2V\vec{i} - (V/2)\vec{j} - 6V\vec{k} = -\omega_x a\vec{j} - \omega_y 3a\vec{k} + \omega_y a\vec{i} + \omega_z 3a\vec{j}$

$2V\vec{i} = \omega_y a\vec{i}$ $\quad (V/2)\vec{j} = -\omega_x a\vec{j} + \omega_z 3a\vec{j}$ $\quad -6V\vec{k} = \omega_y 3a\vec{k}$ $\quad \boxed{\omega_y = 2V/a}$

$\vec{V}_B = \vec{V}_C + \vec{\omega} \wedge (B-C)$

$4V\vec{i} - V\vec{j} = 0 + (\omega_x\vec{i} + \omega_y\vec{j} + \omega_z\vec{k}) \wedge 2a\vec{k}$ $\quad 4V\vec{i} - V\vec{j} = -\omega_x 2a\vec{j} + \omega_y 2a\vec{i}$ $\quad \boxed{\omega_x = V/(2a)}$

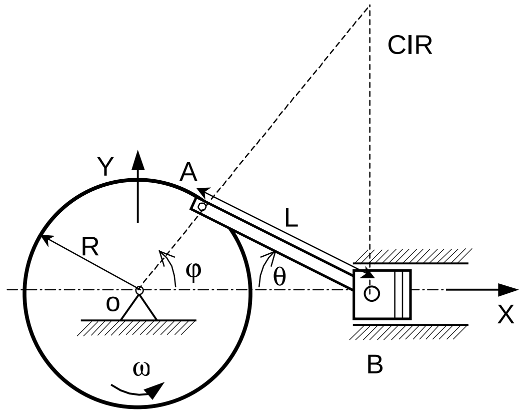
substituindo em $\quad (V/2)\vec{j} = -\omega_x a\vec{j} + \omega_z 3a\vec{j}$ $\quad \boxed{\omega_z = 0}$ (2,0 pontos)

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

2ª Questão (3,0 pontos)



A biela **AB** de comprimento **L** e articulada em **A**, liga o disco de centro em **O** com o pistão articulado em **B**. O disco gira a uma velocidade angular ω constante e o pistão desliza sobre a guia na direção X. Pede-se determinar:

a) graficamente centro instantâneo de rotação da biela **AB**
b) a relação entre os ângulos **φ** e **θ**
c) a velocidade angular **Ω** da biela **AB**
d) a velocidade e aceleração do ponto **B**.

Resolução:

a) CIR – intersecção perpendicular a $\vec{V}_B = V_B\vec{i}$ e $\vec{V}_A$ ou seja (A-O) (0,5 ponto)

$$\vec{V}_A = \vec{V}_O + \vec{\omega} \wedge (A-O) \quad \vec{V}_A = 0 + \omega\vec{k} \wedge R(\cos\varphi\,\vec{i} + \operatorname{sen}\varphi\,\vec{j}) \quad \vec{V}_A = R\omega(\cos\varphi\,\vec{j} - \operatorname{sen}\varphi\,\vec{i})$$

b) no triângulo OAB tem-se: $R\operatorname{sen}\varphi = L\operatorname{sen}(-\theta)$ $\boxed{R\operatorname{sen}\varphi = -L\operatorname{sen}\theta}$ (0,5 ponto)

c) derivando: $R\dot{\varphi}\cos\varphi = -L\dot{\theta}\cos\theta$ $R\omega\cos\varphi = -L\Omega\cos\theta$ $\boxed{\Omega = -\dfrac{R\omega\cos\varphi}{L\cos\theta}}$ (1,0 ponto)

d) $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\Omega} \wedge (B-A)$ $\vec{V}_B = R\omega(\cos\varphi\,\vec{j} - \operatorname{sen}\varphi\,\vec{i}) + \Omega\vec{k} \wedge (L\cos\theta\,\vec{i} - L\operatorname{sen}\theta\,\vec{j})$

$$\vec{V}_B = R\omega\cos\varphi\,\vec{j} - R\omega\operatorname{sen}\varphi\,\vec{i} + \Omega L\cos\theta\,\vec{j} + \Omega L\operatorname{sen}\theta\,\vec{i}$$

$$\vec{V}_B = (\Omega L\operatorname{sen}\theta - R\omega\operatorname{sen}\varphi)\vec{i} + (\Omega L\cos\theta + R\omega\cos\varphi)\,\vec{j}$$

$$\vec{V}_B = (\Omega L\operatorname{sen}\theta - R\omega\operatorname{sen}\varphi)\vec{i} + (-\frac{R\omega\cos\varphi}{L\cos\theta}L\cos\theta + R\omega\cos\varphi)\,\vec{j}$$

$$\boxed{\vec{V}_B = (\Omega L\operatorname{sen}\theta - R\omega\operatorname{sen}\varphi)\vec{i}}$$ (0,5 ponto)

derivando em relação ao tempo:

$$\vec{a}_B = (\dot{\Omega}L\operatorname{sen}\theta + \Omega L\dot{\theta}\cos\theta - R\omega\dot{\varphi}\cos\varphi)\vec{i}$$

$$\boxed{\vec{a}_B = (L\dot{\Omega}\operatorname{sen}\theta + L\Omega^2\cos\theta - R\omega^2\cos\varphi)\vec{i}}$$ (0,5 ponto)

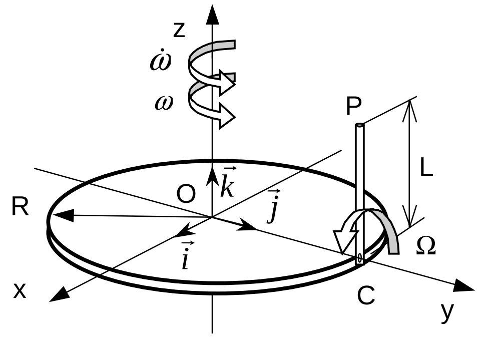
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

3ª Questão (3,0 pontos)

O disco de raio **R** gira em torno do eixo vertical com aceleração angular $\dot{\omega}$ conforme mostrado na figura. A barra **PC** de comprimento **L** e articulada no disco em **C**, gira com velocidade constante **Ω**. Expressando nas coordenadas O*ijk* solidárias ao disco, pede-se determinar:



a) velocidades relativa e absoluta dos pontos **C** e **P**
b) a aceleração absoluta do ponto **C**
c) a aceleração relativa e absoluta do ponto **P**

Resolução:

a) velocidade absoluta de **C ,** relativa e absoluta do ponto **P**

$$\vec{V}_C = \vec{V}_O + \vec{\omega} \wedge (C - O) \qquad \vec{V}_C = 0 + \omega \vec{k} \wedge R\,\vec{j} \qquad \boxed{\vec{V}_C = -\omega R\,\vec{i}}$$ (0,5 ponto)

$$\vec{V}_{P,rel} = \vec{V}_{C,rel} + \vec{\Omega} \wedge (P - C) \qquad \vec{V}_{P,rel} = 0 + \Omega\,\vec{j} \wedge L\,\vec{k} \qquad \boxed{\vec{V}_{P,rel} = \Omega L\,\vec{i}}$$

$$\vec{V}_{P,arr} = \vec{V}_{C,arr} + \vec{\omega} \wedge (P - C) \qquad \vec{V}_{P,arr} = -\omega R\,\vec{i} + \omega\vec{k} \wedge L\,\vec{k} \qquad \vec{V}_{P,arr} = -\omega R\,\vec{i}$$

$$\vec{V}_P = \vec{V}_{P,rel} + \vec{V}_{P,arr} \qquad \boxed{\vec{V}_{P,arr} = (\Omega L - \omega R)\,\vec{i}}$$ (0,5 ponto)

b) a aceleração absoluta do ponto **C:**

$$\vec{a}_C = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge (C - O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (C - O)] \qquad \vec{a}_C = 0 + \dot{\omega}\vec{k} \wedge R\,\vec{j} + \omega\vec{k} \wedge [\omega\vec{k} \wedge R\,\vec{j}]$$

$$\boxed{\vec{a}_C = -\dot{\omega} R\,\vec{i} - \omega^2 R\,\vec{j}}$$ (0,5 ponto)

c) a aceleração relativa e absoluta do ponto **P:**

$$\vec{a}_{P,rel} = \vec{a}_{C,rel} + \dot{\vec{\Omega}} \wedge (P - C) + \vec{\Omega} \wedge [\vec{\Omega} \wedge (P - C)] \qquad \vec{a}_{P,rel} = 0 + 0\,\vec{j} \wedge L\,\vec{k} + \Omega\,\vec{j} \wedge [\Omega\,\vec{j} \wedge L\,\vec{k}]$$

$$\boxed{\vec{a}_{P,rel} = -\Omega^2 L\,\vec{k}}$$ (0,5 ponto)

$$\vec{a}_{P,arr} = \vec{a}_C + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P - C) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P - C)] \qquad \vec{a}_{P,arr} = -\dot{\omega} R\,\vec{i} - \omega^2 R\,\vec{j} + \dot{\omega}\vec{k} \wedge L\,\vec{k} + \omega\vec{k} \wedge [\omega\vec{k} \wedge L\,\vec{k}]$$

$$\vec{a}_{P,arr} = -\dot{\omega} R\,\vec{i} - \omega^2 R\,\vec{j}$$

$$\vec{a}_{P,cor} = 2\,\vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{V}_{P,rel} \qquad \vec{a}_{P,cor} = 2\,\omega\vec{k} \wedge \Omega L\,\vec{i} \qquad \boxed{\vec{a}_{P,cor} = 2\,\omega \Omega L\,\vec{j}}$$ (0,5 ponto)

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{P,rel} + \vec{a}_{P,arr} + \vec{a}_{P,cor} \qquad \vec{a}_P = (-\Omega^2 L\,\vec{k}) + (-\dot{\omega} R\,\vec{i} - \omega^2 R\,\vec{j}) + (2\omega\Omega L\,\vec{j})$$

$$\boxed{\vec{a}_P = -\dot{\omega} R\,\vec{i} + (2\omega\Omega L - \omega^2 R)\,\vec{j} - \Omega^2 L\,\vec{k}}$$ (0,5 ponto)