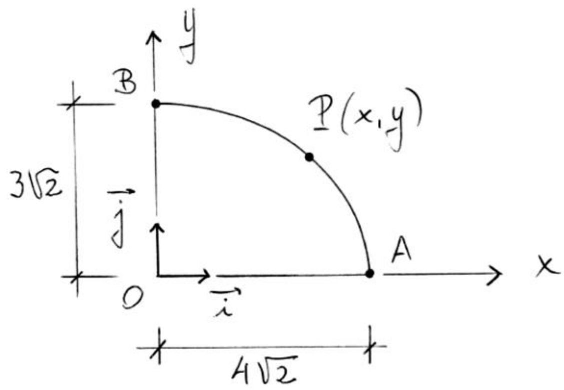
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 – MECÂNICA 1 – Segunda Prova – 7 de Novembro de 2023. Duração: 120 min.

(Não é permitido o uso de calculadoras, celulares, tablets e dispositivos similares)

1ª Questão (3,0 pontos). O ponto P percorre o quadrante de uma elipse, com semieixos $4\sqrt{2}$ e $3\sqrt{2}$, de A até B :

O movimento de P é definido pelas equações do movimento (em formulação adimensional):



$\boxed{x = 4\sqrt{2}\cos t}$ e $\boxed{y = 3\sqrt{2}\sin t}$ sendo: $0 \le t \le \pi/2$

Determine, para o instante $t = \pi/4$:

a) A velocidade e a aceleração na base $\vec{i}\vec{j}$;
b) Os versores do triedro de *Frenet*;
c) A velocidade e a aceleração intrínsecas;
d) O raio de curvatura da trajetória.

RESOLUÇÃO

a) Velocidade e aceleração na base fixa

$$\vec{r} = \sqrt{2}\,(4\cos t\,\vec{i} + 3\sin t\,\vec{j})$$

$$\therefore \quad \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \sqrt{2}\,(-4\sin t\,\vec{i} + 3\cos t\,\vec{j}) \quad \text{e} \quad \vec{a} = \dot{\vec{v}} = \sqrt{2}\,(-4\cos t\,\vec{i} - 3\sin t\,\vec{j})$$

No instante $t = \pi/4$ temos: $\boxed{\vec{v} = -4\,\vec{i} + 3\,\vec{j}}$ e $\boxed{\vec{a} = -4\,\vec{i} - 3\,\vec{j}}$

(0,5)

b) Versores da base de Frenet

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{-4\,\vec{i} + 3\,\vec{j}}{5} \quad \therefore \quad \boxed{\vec{\tau} = -0{,}8\,\vec{i} + 0{,}6\,\vec{j}}$$

$$\vec{b} = \frac{\vec{v} \wedge \vec{a}}{|\vec{v} \wedge \vec{a}|} = \frac{24\,\vec{k}}{24} \quad \therefore \quad \boxed{\vec{b} = \vec{k}}$$

$$\vec{n} = \vec{b} \wedge \vec{\tau} \quad \therefore \quad \boxed{\vec{n} = -0{,}6\,\vec{i} - 0{,}8\,\vec{j}}$$

(1,0)

c) Velocidade e aceleração intrínsecas

$\vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{\tau})\,\vec{\tau} \quad \therefore \quad \boxed{\vec{v} = 5\,\vec{\tau}}$

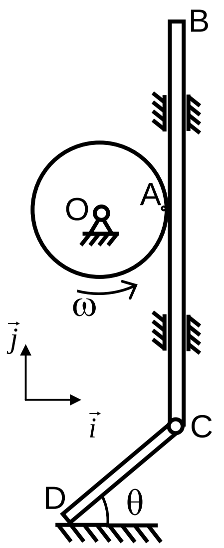
$\vec{a} = (\vec{a} \cdot \vec{\tau})\,\vec{\tau} + (\vec{a} \cdot \vec{n})\,\vec{n} \quad \therefore \quad \boxed{\vec{a} = 1{,}4\,\vec{\tau} + 4{,}8\,\vec{n}}$

(1,0)

d) Raio local de curvatura

$$\rho = \frac{|\vec{v}|^3}{|\vec{v} \wedge \vec{a}|} = \frac{5^3}{24} \quad \therefore \quad \boxed{\rho = \frac{125}{24}}$$

(0,5)



2ª Questão (3,5 pontos). No sistema mostrado na figura, o disco de centro fixo *O* tem raio *R* e vetor de rotação $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$, constante. O disco rola sem escorregar em relação à barra *BC*, que tem liberdade para mover-se verticalmente. A barra *CD* tem comprimento *L*, está articulada em *C* e desliza no ponto *D*, mantendo contato com a superfície horizontal.

Para o instante considerado, pede-se:

a) A velocidade do ponto *A* de contato entre o disco em a barra BC;

b) Os centros instantâneos de rotação (*CIR*) do disco e da barra *CD*;

c) O vetor de rotação da barra *CD*;

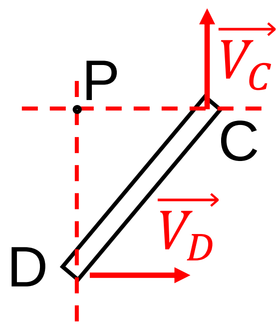
d) A aceleração do ponto *A* pertencente ao disco e do ponto *C*.

RESOLUÇÃO

a) Velocidade do ponto A

$$\overrightarrow{V_A} = \overrightarrow{V_O} + \vec{\omega} \wedge (A - O) \quad \Rightarrow \overrightarrow{V_A} = \vec{0} + \omega\vec{k} \wedge (R\vec{\imath}) \Rightarrow \overrightarrow{V_A} = \omega R\vec{\jmath}$$

(0,5)



b) CIR do disco

O CIR do disco está no ponto O, que é um ponto fixo.

Para a barra *CD*, CIR_{CD} está sobre o ponto *P.*

(1,0)

c) Vetor rotação da barra CD

A barra *BC* está em translação com velocidade igual a $\overrightarrow{V_A}$

Portanto, $\overrightarrow{V_C} = \omega R\vec{\jmath}$

Para a barra *CD*:

$$\overrightarrow{V_C} = \overrightarrow{V_P} + \overrightarrow{\omega_{CD}} \wedge (C - P) \quad \Rightarrow \omega R\vec{\jmath} = \vec{0} + \omega_{CD}\vec{k} \wedge (Lcos\theta\vec{\jmath}) \quad \Rightarrow \omega_{CD} = \frac{\omega R}{Lcos\theta}$$

$$\Rightarrow \vec{\omega}_{CD} = \frac{\omega R}{Lcos\theta}\vec{k}$$

(1,0)

d) Aceleração do ponto A

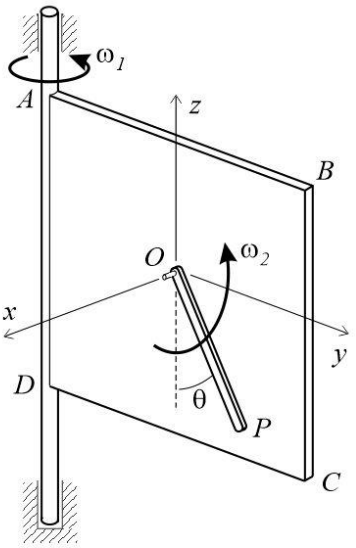
Para o disco: $\vec{a}_A = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge (A - O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (A - O)]$

$\Rightarrow \vec{a}_A = \vec{0} + \vec{0} + \omega\vec{k} \wedge [\omega R\vec{j}] \;\; \Rightarrow \vec{a}_A = -\omega^2 R\vec{i}$

Como $\vec{\omega}$ é constante, $\overrightarrow{V_C}$ é constante $\Rightarrow \overrightarrow{a_C} = \vec{0}$

(1,0)

3ª Questão (3,5 pontos). A placa quadrada $ABCD$, de lado $2a$, gira em torno do eixo vertical AD com velocidade angular $\omega_1\vec{k}$ (ω_1 constante). A barra delgada OP, de comprimento ℓ, é vinculada ao ponto O (localizado no centro da placa) por meio de um pino que a impede de mover-se fora do plano Oyz. Sabendo que a barra OP gira com velocidade angular $\omega_2\vec{\imath}$ (ω_2 constante) em torno do eixo Ox e denotando por θ o ângulo fomado entre $-z$ e $(P-O)$, pede-se determinar, em função dos dados do problema:



(a) as velocidades relativa de arrastamento e absoluta de P;
(b) as acelerações relativa, de arrastamento, de Coriolis e absoluta de P.

RESOLUÇÃO

(a) Cálculo da velocidade absoluta de P

A velocidade relativa de P é:

$$\vec{v}_{Prel} = \omega_2\vec{\imath} \wedge (P-O) = \omega_2\vec{\imath} \wedge \ell\left(\sin\theta\,\vec{\jmath} - \cos\theta\,\vec{k}\right) = \omega_2\ell\left(\sin\theta\,\vec{k} + \cos\theta\,\vec{\jmath}\right) \quad (0{,}5)$$

A velocidade de arrastamento de P é:

$$\vec{v}_{Parr} = \vec{v}_A + \omega_1\vec{k} \wedge (P-A) = \vec{0} + \omega_1\vec{k} \wedge [(P-O)+(O-A)]$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{Parr} = \omega_1\vec{k} \wedge \left[\ell\left(\sin\theta\,\vec{\jmath} - \cos\theta\,\vec{k}\right) + \left(a\vec{\jmath} - a\vec{k}\right)\right] = -\omega_1(\ell\sin\theta + a)\vec{\imath} \quad (0{,}5)$$

A velocidade absoluta de P é:

$$\vec{v}_P = \omega_1(\ell\sin\theta + a)\vec{\imath} + \omega_2\ell\left(\sin\theta\,\vec{k} + \cos\theta\,\vec{\jmath}\right) \quad (0{,}25)$$

A aceleração relativa de P é:

$$\vec{a}_{Prel} = \omega_2\vec{\imath} \wedge [\omega_2\vec{\imath} \wedge (P-O)] = \omega_2\vec{\imath} \wedge \left[\omega_2\vec{\imath} \wedge \ell\left(\sin\theta\,\vec{\jmath} - \cos\theta\,\vec{k}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{Prel} = \omega_2\vec{\imath} \wedge \left[\omega_2\ell\left(\sin\theta\,\vec{k} + \cos\theta\,\vec{\jmath}\right)\right] = \omega_2^2\ell\left(-\sin\theta\,\vec{\jmath} + \cos\theta\,\vec{k}\right) \quad (0{,}5)$$

A aceleração de arrastamento de P é:

$$\vec{a}_{Parr} = \vec{a}_A + \dot{\omega}_1\vec{k} \wedge (P-A) + \omega_1\vec{k} \wedge \left[\omega_1\vec{k} \wedge (P-A)\right] = \omega_1\vec{k} \wedge [-\omega_1(\ell\sin\theta + a)\vec{\imath}]$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{Parr} = -\omega_1^2(\ell\sin\theta + a)\vec{\jmath} \quad (1{,}0)$$

A aceleração de Coriolis de P é:

$$\vec{a}_{Pcor} = 2\vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{v}_{Prel} = 2\omega_1\vec{k} \wedge \omega_2\ell\left(\sin\theta\,\vec{k} + \cos\theta\,\vec{\jmath}\right) = -2\omega_1\omega_2\ell\cos\theta\,\vec{\imath} \quad (0{,}5)$$

A aceleração absoluta de P é:

$$\vec{a}_P = \omega_2^2 \ell \left(-\sin\theta\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k} \right) - \omega_1^2 (\ell \sin\theta + a)\vec{j} - 2\omega_1\omega_2\ell\cos\theta\,\vec{i}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_P = -2\omega_1\omega_2\ell\cos\theta\,\vec{i} - \left[\omega_2^2\ell\sin\theta + \omega_1^2(\ell\sin\theta + a)\right]\vec{j} + \omega_2^2\ell\cos\theta\,\vec{k} \qquad (0{,}25)$$