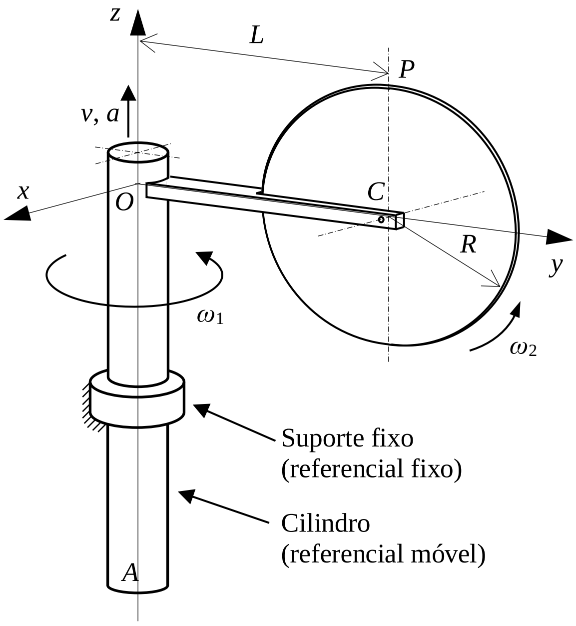
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

Mecânica I **PME 3100** **Prova nº 2** **Data 06 / 12 / 2022**

Duração da Prova: 120 minutos - Prova sem consulta.
Não é permitido o porte de calculadoras, "tablets", celulares e dispositivos similares.



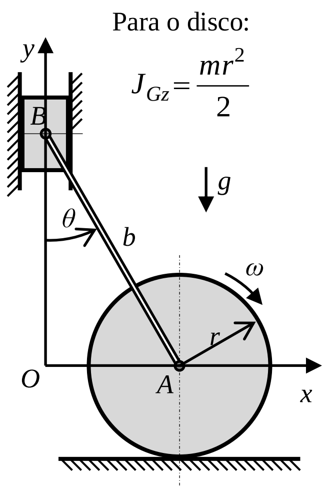
Questão 1 (3,0 pontos) – No mecanismo mostrado na figura, e considerando o referencial fixo, o cilindro *OA* tem vetor de rotação $\vec{\omega}_1 = \omega_1 \vec{k}$, constante, e o ponto *O*, pertencente ao cilindro, tem velocidade $\vec{v} = v\vec{k}$ e aceleração $\vec{a} = a\vec{k}$. A barra *OC* é fixa no cilindro, formando um único corpo rígido. O sistema de coordenadas *Oxyz* é fixo no cilindro. O disco de centro *C* e raio *R* tem sua face plana sempre paralela ao plano *Oyz*, e tem vetor de rotação $\vec{\omega}_2 = \omega_2 \vec{i}$, constante, em relação à barra *OC*. No instante mostrado na figura, o segmento *PC* é paralelo ao eixo *Oz*. Nesse instante determine:

a – (1,0 ponto) o vetor de rotação relativo $\vec{\omega}_{rel}$, de arrastamento $\vec{\omega}_{arr}$ e absoluto $\vec{\omega}_{abs}$ do disco, bem como o seu vetor aceleração angular absoluto $\vec{\alpha}_{abs}$;

b – (1,0 ponto) a velocidade relativa $\vec{v}_{P,rel}$, de arrastamento $\vec{v}_{P,arr}$ e absoluta $\vec{v}_{P,abs}$ do ponto *P*;

c – (1,0 ponto) a aceleração relativa $\vec{a}_{P,rel}$, de arrastamento $\vec{a}_{P,arr}$ e absoluta $\vec{a}_{P,abs}$ do ponto *P*.

Questão 2 (3,5 pontos) – O sistema ilustrado é composto por um disco homogêneo de centro A, raio r e massa m, uma barra rígida AB de comprimento b e ***inércia desprezível***, e um bloco B de massa m. O disco pode rolar sem escorregar sobre uma superfície horizontal, o bloco pode deslizar sem atrito em uma guia vertical e a barra encontra-se articulada tanto ao centro do disco, em A, quanto ao centro do bloco, em B. Sejam θ o ângulo que a barra AB forma com a vertical e $\vec{\omega} = -\omega\vec{k}$ o vetor velocidade angular do disco. Considerando que o sistema parte praticamente do repouso $(\omega \approx 0)$ da posição inicial $\theta = 0$, pedem-se:



a – (0,5 ponto) as coordenadas, no sistema de coordenadas Oxy fornecido, do centro instantâneo de rotação (CIR) da barra AB, em função de θ;

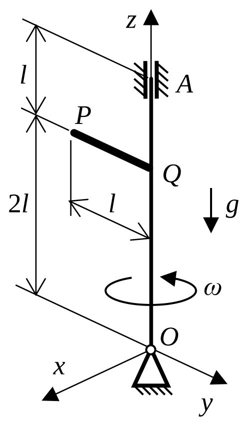
b – (0,5 ponto) a expressão da velocidade do ponto B, $\vec{v}_B$, em função de θ e ω;

c – (1,0 ponto) os diagramas de corpo livre do disco e do bloco;

d – (1,0 ponto) o trabalho das forças (*W*) e a expressão da energia cinética do sistema (*E*) em função de θ e ω;

e – (0,5 ponto) a expressão da velocidade angular ω do disco em função de θ, usando o TEC.

Questão 3 (3,5 pontos) – A figura ilustra um corpo rígido único, constituído por uma barra esbelta homogênea PQ de comprimento l e massa m, contida no plano Oyz, e por um eixo OA de comprimento $3l$ e massa desprezível. O sistema de coordenadas $Oxyz$ é solidário ao corpo, que gira em torno de um eixo vertical fixo Oz com velocidade angular ω constante. O mancal em A é modelado como um anel e o mancal em O, como articulação. Pede-se:



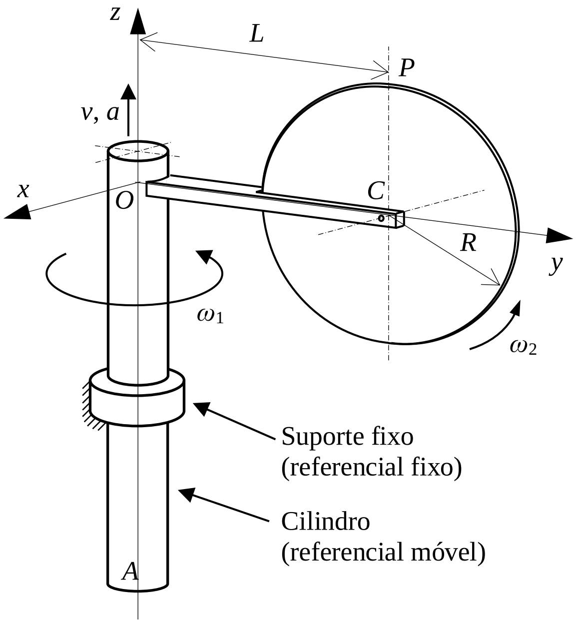
a – (1,0 ponto) determinar o momento de inércia J_{Oz} e os produtos de inércia J_{Oxz} e J_{Oyz} com respeito ao sistema de coordenadas $Oxyz$;

b – (1,0 ponto) esboçar o diagrama de corpo livre (DCL) do corpo;

c – (1,5 ponto) usando o TQMA e o TR, determinar as componentes de reação nos mancais A e O.

Dado: momento de inércia de uma barra em relação ao centro de massa $J_{Gz} = \dfrac{ml^2}{12}$.

Gabarito



Questão 1 (3,0 pontos) – No mecanismo mostrado na figura, e considerando o referencial fixo, o cilindro *OA* tem vetor de rotação $\vec{\omega}_1 = \omega_1\vec{k}$, constante, e o ponto *O*, pertencente ao cilindro, tem velocidade $\vec{v} = v\vec{k}$ e aceleração $\vec{a} = a\vec{k}$. A barra *OC* é fixa no cilindro, formando um único corpo rígido. O sistema de coordenadas *Oxyz* é fixo no cilindro. O disco de centro *C* e raio *R* tem sua face plana sempre paralela ao plano *Oyz*, e tem vetor de rotação $\vec{\omega}_2 = \omega_2\vec{i}$, constante, em relação à barra *OC*. No instante mostrado na figura, o segmento *PC* é paralelo ao eixo *Oz*. Nesse instante determine:

a – (1,0 ponto) o vetor de rotação relativo $\vec{\omega}_{rel}$, de arrastamento $\vec{\omega}_{arr}$ e absoluto $\vec{\omega}_{abs}$ do disco, bem como o seu vetor aceleração angular absoluto $\vec{\alpha}_{abs}$;

b – (1,0 ponto) a velocidade relativa $\vec{v}_{P,rel}$, de arrastamento $\vec{v}_{P,arr}$ e absoluta $\vec{v}_{P,abs}$ do ponto *P*;

c – (1,0 ponto) a aceleração relativa $\vec{a}_{P,rel}$, de arrastamento $\vec{a}_{P,arr}$ e absoluta $\vec{a}_{P,abs}$ do ponto *P*.

Solução

a – O cilindro e a barra *OC* formam um sólido e constituem o referencial móvel, então $\boxed{\vec{\omega}_{rel} = \omega_2\vec{i}}$.

A partir do enunciado, $\boxed{\vec{\omega}_{arr} = \omega_1\vec{k}}$. Portanto, $\vec{\omega}_{abs} = \vec{\omega}_{rel} + \vec{\omega}_{arr} \Rightarrow \boxed{\vec{\omega}_{abs} = \omega_2\vec{i} + \omega_1\vec{k}}$ 0,5 ponto

Vetor aceleração angular absoluto: $\vec{\alpha}_{abs} = \vec{\alpha}_{rel} + \vec{\alpha}_{arr} + \vec{\alpha}_{com} = \vec{0} + \vec{0} + \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{\omega}_{rel} \Rightarrow \boxed{\vec{\alpha}_{abs} = \omega_1\omega_2\vec{j}}$ 0,5 ponto

b – Velocidade relativa do ponto *P*: $\vec{v}_{P,rel} = \vec{v}_{C,rel} + \vec{\omega}_{rel} \wedge (P - C) = \vec{0} + \omega_2\vec{i} \wedge R\vec{k} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{P,rel} = -\omega_2 R\vec{j}}$ 0,5 ponto

Velocidade de arrastamento do ponto *P*: $\vec{v}_{P,arr} = \vec{v}_{O,arr} + \vec{\omega}_{arr} \wedge (P - O) = v\vec{k} + \omega_1\vec{k} \wedge (L\vec{j} + R\vec{k}) \Rightarrow$

$\boxed{\vec{v}_{P,arr} = -\omega_1 L\vec{i} + v\vec{k}}$ 0,5 ponto

Velocidade absoluta do ponto *P*: $\vec{v}_{P,abs} = \vec{v}_{P,rel} + \vec{v}_{P,arr} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{P,abs} = -\omega_1 L\vec{i} - \omega_2 R\vec{j} + v\vec{k}}$

c – Aceleração relativa do ponto *P*: $\vec{a}_{P,rel} = \vec{a}_{C,rel} + \vec{\alpha}_{rel} \wedge (P - C) + \vec{\omega}_{rel} \wedge [\vec{\omega}_{rel} \wedge (P - C)]$

$\vec{a}_{P,rel} = \vec{0} + \vec{0} \wedge (P - C) + \omega_2\vec{i} \wedge (\omega_2\vec{i} \wedge R\vec{k}) \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{P,rel} = -\omega_2^2 R\vec{k}}$ 0,3 ponto

Aceleração de arrastamento do ponto *P*: $\vec{a}_{P,arr} = \vec{a}_{O,arr} + \vec{\alpha}_{arr} \wedge (P - O) + \vec{\omega}_{arr} \wedge [\vec{\omega}_{arr} \wedge (P - O)]$

$\vec{a}_{P,arr} = a\vec{k} + \vec{0} \wedge (P - O) + \omega_1\vec{k} \wedge [\omega_1\vec{k} \wedge (L\vec{j} + R\vec{k})] \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{P,arr} = -\omega_1^2 L\vec{j} + a\vec{k}}$ 0,4 ponto

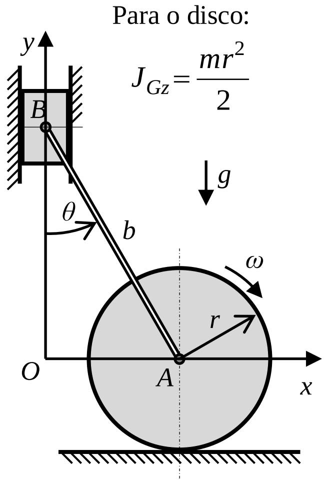
Aceleração complementar (de Coriolis) do ponto *P*: $\vec{a}_{P,com} = 2\vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{v}_{P,rel} = 2\omega_1\vec{k} \wedge (-\omega_2 R\vec{j}) \Rightarrow$

$\vec{a}_{P,com} = 2\omega_1\omega_2 R\vec{i}$ 0,3 ponto

Aceleração absoluta do ponto *P*: $\vec{a}_{P,abs} = \vec{a}_{P,rel} + \vec{a}_{P,arr} + \vec{a}_{P,com} \Rightarrow$

$\boxed{\vec{a}_{P,abs} = 2\omega_1\omega_2 R\vec{i} - \omega_1^2 L\vec{j} + (a - \omega_2^2 R)\vec{k}}$

Questão 2 (3,5 pontos) – O sistema ilustrado é composto por um disco homogêneo de centro A, raio r e massa m, uma barra rígida AB de comprimento b e ***inércia desprezível***, e um bloco B de massa m. O disco pode rolar sem escorregar sobre uma superfície horizontal, o bloco pode deslizar sem atrito em uma guia vertical e a barra encontra-se articulada tanto ao centro do disco, em A, quanto ao centro do bloco, em B. Sejam θ o ângulo que a barra AB forma com a vertical e $\vec{\omega} = -\omega\vec{k}$ o vetor velocidade angular do disco. Considerando que o sistema parte praticamente do repouso $(\omega \approx 0)$ da posição inicial $\theta = 0$, pedem-se:



a – (0,5 ponto) as coordenadas, no sistema de coordenadas Oxy fornecido, do centro instantâneo de rotação (CIR) da barra AB, em função de θ;

b – (0,5 ponto) a expressão da velocidade do ponto B, $\vec{v}_B$, em função de θ e ω;

c – (1,0 ponto) os diagramas de corpo livre do disco e do bloco;

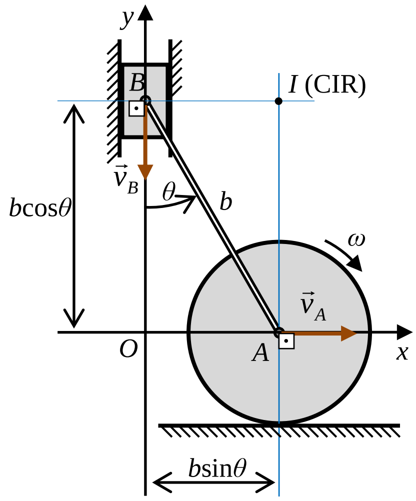
d – (1,0 ponto) o trabalho das forças (W) e a expressão da energia cinética do sistema (E) em função de θ e ω;

e – (0,5 ponto) a expressão da velocidade angular ω do disco em função de θ, usando o TEC.

Solução

a – A partir da construção indicada na figura, o centro instantâneo de rotação corresponde ao ponto I:

$$\boxed{(I - O) = b\sin\theta\vec{i} + b\cos\theta\vec{j}}$$ 0,5 ponto

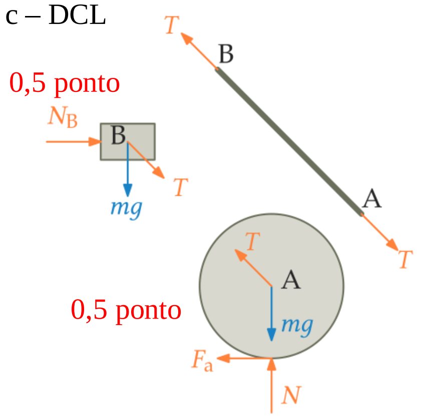


b – Também a partir da construção indicada na figura, observando que a barra AB gira em sentido anti-horário e que, da condição de rolamento sem escorregamento do disco, $\vec{v}_A = \omega r\vec{i}$:

$$|\vec{\omega}_{AB}| = \frac{|\vec{v}_A|}{|A-I|} = \frac{|\vec{v}_B|}{|B-I|} \Rightarrow |\vec{\omega}_{AB}| = \frac{\omega r}{b\cos\theta} = \frac{|\vec{v}_B|}{b\sin\theta} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{v}_B = -\omega r\tan\theta\vec{j}}$$ 0,5 ponto

c – DCL



d – Trabalho:

O trabalho combinado das forças internas T é nulo.

Dado que não há escorregamento no contato do disco com o solo, o trabalho da força de atrito F_a é nulo.

As forças normais N e N_B também não realizam trabalho (são normais ao deslocamento).

Como não há variação da cota vertical, o trabalho do peso do disco é também nulo.

O trabalho do peso do bloco é $mg(b - b\cos\theta)$

Portanto, o trabalho total é $\boxed{W = mgb(1-\cos\theta)}$ 0,5 ponto

A energia cinética do sistema é dada por:

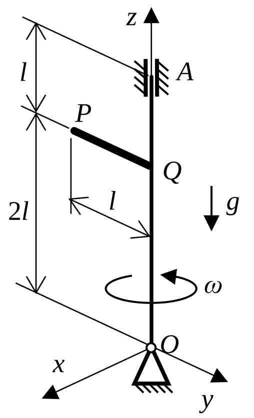
$$E = \frac{1}{2}m|\vec{v}_A|^2 + \frac{1}{2}J_A|\vec{\omega}|^2 + \frac{1}{2}m|\vec{v}_B|^2 = \frac{1}{2}m(\omega r)^2 + \frac{1}{2}\frac{mr^2}{2}\omega^2 + \frac{1}{2}m(\omega r\tan\theta)^2 \Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{4}mr^2\omega^2(3+2\tan^2\theta)}$$

0,5 ponto

e – Usando o TEC:

$$E_f - E_i = W \Rightarrow \frac{1}{4}mr^2\omega^2(3+2\tan^2\theta) - 0 = mgb(1-\cos\theta) \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{4gb(1-\cos\theta)}{r^2(3+2\tan^2\theta)}}}$$ 0,5 ponto

Questão 3 (3,5 pontos) – A figura ilustra um corpo rígido único, constituído por uma barra esbelta homogênea PQ de comprimento l e massa m, contida no plano Oyz, e por um eixo OA de comprimento $3l$ e massa desprezível. O sistema de coordenadas $Oxyz$ é solidário ao corpo, que gira em torno de um eixo vertical fixo Oz com velocidade angular ω constante. O mancal em A é modelado como um anel e o mancal em O, como articulação. Pede-se:



a – (1,0 ponto) determinar o momento de inércia J_{Oz} e os produtos de inércia J_{Oxz} e J_{Oyz} com respeito ao sistema de coordenadas $Oxyz$;

b – (1,0 ponto) esboçar o diagrama de corpo livre (DCL) do corpo;

c – (1,5 ponto) usando o TQMA e o TR, determinar as componentes de reação nos mancais A e O.

Dado: momento de inércia de uma barra em relação ao centro de massa $J_{Gz} = \dfrac{ml^2}{12}$.

Solução

a – Posição do centro de massa:

$$(G-O) = \frac{-l}{2}\vec{j} + 2l\vec{k}$$

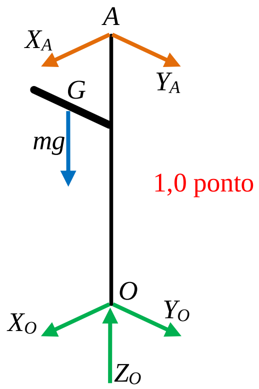
Momento de inércia J_{Oz}:

$$J_{Oz} = J_{Gz} + m\left(x_G^2 + y_G^2\right) = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow \boxed{J_{Oz} = \frac{1}{3}ml^2}$$ 0,5 ponto

Produtos de inércia J_{Oxz} e J_{Oyz}:

$$\underbrace{J_{Oxz} = m(0)(2l) \Rightarrow \boxed{J_{Oxz} = 0} \qquad J_{Oyz} = m\left(\frac{-l}{2}\right)(2l) \Rightarrow \boxed{J_{Oyz} = -ml^2}}_{0{,}5\ \text{ponto}}$$

b – Diagrama de corpo livre:



1,0 ponto

c – Considerando que $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$, a quantidade de movimento angular do corpo com respeito ao polo O e sua derivada temporal são dadas respectivamente por:

$$\vec{H}_O = -J_{Oxz}\omega\vec{i} - J_{Oyz}\omega\vec{j} + J_{Oz}\omega\vec{k} = ml^2\omega\left(\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}\right)$$

$$\frac{d\vec{H}_O}{dt} = ml^2\omega\left[\left(\omega\vec{k} \wedge \vec{j}\right) + \frac{1}{3}\left(\omega\vec{k} \wedge \vec{k}\right)\right] = -ml^2\omega^2\vec{i}$$ 0,5 ponto

O momento das forças externas com respeito ao polo O é, por sua vez:

$$\vec{M}_O = (A-O) \wedge \left(X_A\vec{i} + Y_A\vec{j}\right) + (G-O) \wedge \left(-mg\vec{k}\right)$$

$$\vec{M}_O = \left(3l\vec{k}\right) \wedge \left(X_A\vec{i} + Y_A\vec{j}\right) + \left(-\frac{l}{2}\vec{j} + 2l\vec{k}\right) \wedge \left(-mg\vec{k}\right) = \left(-3lY_A + \frac{l}{2}mg\right)\vec{i} + 3lX_A\vec{j}$$ 0,3 ponto

Aplicando o teorema da quantidade de movimento angular com polo O:

$$\frac{d\vec{H}_O}{dt} = \vec{M}_O \Rightarrow \begin{cases} -ml^2\omega^2 = -3lY_A + \frac{1}{2}mgl \\ 0 = 3lX_A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{Y_A = \frac{1}{3}ml\omega^2 + \frac{1}{6}mg} \\ \boxed{X_A = 0} \end{cases}$$ 0,2 ponto

Aceleração do centro de massa:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_O + \vec{\alpha} \wedge (G-O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G-O)] = \vec{0} + \vec{0} + \omega\vec{k} \wedge \left[\omega\vec{k} \wedge \left(\frac{-l}{2}\vec{j} + 2l\vec{k}\right)\right] = \omega^2\frac{l}{2}\vec{j}$$ 0,3 ponto

Aplicando o teorema da resultante, temos:

$$m\vec{a}_G = \vec{R} \Rightarrow \begin{cases} 0 = X_A + X_O \\ m\omega^2\frac{l}{2} = Y_A + Y_O \\ 0 = Z_O - mg \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{X_O = 0} \\ \boxed{Y_O = \frac{1}{6}ml\omega^2 - \frac{1}{6}mg} \\ \boxed{Z_O = mg} \end{cases}$$ 0,2 ponto