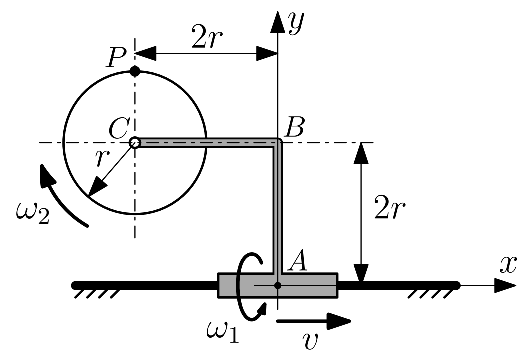
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 – MECÂNICA I – Prova 2 – 15 de Outubro de 2019

Duração da Prova: 120 minutos (não é permitido usar quaisquer dispositivos eletrônicos)

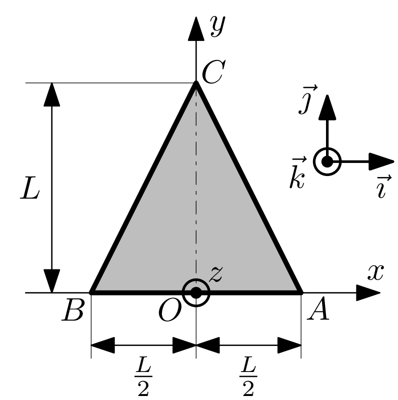
Questão 1 (3,5 pontos). O dispositivo ABC desliza sobre uma guia horizontal com velocidade $\vec{v} = v\vec{\imath}$ (v constante). O mesmo dispositivo também gira em torno do eixo horizontal Ax com velocidade angular $\vec{\omega}_1 = \omega_1\vec{\imath}$ (ω_1 constante). Adicionalmente, o dispositivo transporta em sua extremidade C um disco de raio r que gira com velocidade angular $\vec{\omega}_2 = -\omega_2\vec{k}$ (ω_2 constante) em relação a ABC. Utilizando o sistema de coordenadas $Axyz$, de versores $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, solidário ao dispositivo ABC (referencial móvel), e considerando o instante ilustrado na figura, determine:



a) as velocidades relativa ($\vec{v}_{P,\text{rel}}$), de arrastamento ($\vec{v}_{P,\text{arr}}$) e absoluta ($\vec{v}_{P,\text{abs}}$) do ponto P do disco;
b) as acelerações relativa ($\vec{a}_{P,\text{rel}}$), de arrastamento ($\vec{a}_{P,\text{arr}}$) e absoluta ($\vec{a}_{P,\text{abs}}$) do ponto P do disco;
c) os vetores de rotação absoluta ($\vec{\omega}$) e de aceleração rotacional absoluta ($\vec{\alpha}$) do disco.

Questão 2 (3,0 pontos). A chapa triangular ABC mostrada na figura tem base e altura de comprimento L. Em um dado instante, sabe-se que as velocidades dos pontos A, B e C são:

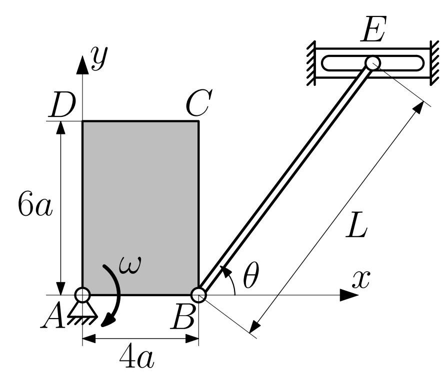
$$\vec{v}_A = \frac{\lambda L}{2}\,\vec{\jmath}, \quad \vec{v}_B = \frac{-\lambda L}{2}\,\vec{\jmath} \quad \text{e} \quad \vec{v}_C = -\lambda L\,\vec{\imath} + \lambda L\,\vec{k}$$



Determinar, para este instante, em função de λ e L:

a) o vetor rotação $\vec{\Omega}$ do triângulo ABC;
b) a velocidade do ponto O;
c) o eixo helicoidal instantâneo do corpo.

Questão 3 (3,5 pontos). O mecanismo mostrado na figura ao lado é composto pela placa retangular $ABCD$, articulada em B à barra BE, de comprimento L. O sistema é vinculado à articulação A, e o pino em E está encaixado *sem* atrito na guia horizontal. Sabendo-se que no instante analisado a placa $ABCD$ possui vetor de rotação $\vec{\omega} = -\omega\vec{k}$, constante, determine, *para este instante*:



a) a velocidade e a aceleração do ponto B;
b) o centro instantâneo de rotação da barra BE, indicando claramente a construção geométrica;
c) o vetor de rotação $\vec{\omega}_{\text{BE}}$ da barra BE;
d) a velocidade do ponto E da barra BE;

Resolução da Questão 1 **(3,5 pontos)**

a) Considerando a composição de movimentos do sistema, e sabendo que o dispositivo ABC corresponde ao referencial móvel em questão, tem-se:

$$\vec{v}_{P,\text{abs}} = \vec{v}_{P,\text{rel}} + \vec{v}_{P,\text{arr}}$$

onde

$$\vec{v}_{P,\text{rel}} = \vec{v}_{C,\text{rel}} + \vec{\omega}_{\text{rel}} \wedge (P - C) = -\omega_2 \vec{k} \wedge r\vec{\jmath} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{v}_{P,\text{rel}} = (\omega_2 r)\vec{\imath}} \qquad \textbf{(0,5)}$$

$$\vec{v}_{P,\text{arr}} = \vec{v}_{A,\text{arr}} + \vec{\omega}_{\text{arr}} \wedge (P - A) = v\vec{\imath} + \omega_1 \vec{\imath} \wedge (-2r\vec{\imath} + 3r\vec{\jmath}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{v}_{P,\text{arr}} = v\vec{\imath} + (3\omega_1 r)\vec{k}} \qquad \textbf{(0,5)}$$

Finalmente, a velocidade absoluta do ponto P do disco é dada por:

$$\boxed{\vec{v}_{P,\text{abs}} = (\omega_2 r + v)\vec{\imath} + (3\omega_1 r)\vec{k}}$$

b) Analogamente, considerando a composição de movimentos do sistema para a aceleração, e admitindo as acelerações rotacionais como nulas, tem-se:

$$\vec{a}_{P,\text{abs}} = \vec{a}_{P,\text{rel}} + \vec{a}_{P,\text{arr}} + \vec{a}_{P,\text{Cor}}$$

onde

$$\vec{a}_{P,\text{rel}} = \vec{a}_{C,\text{rel}} + \vec{\alpha}_{\text{rel}} \wedge (P - C) + \vec{\omega}_{\text{rel}} \wedge [\vec{\omega}_{\text{rel}} \wedge (P - C)] = -\omega_2 \vec{k} \wedge [-\omega_2 \vec{k} \wedge r\vec{\jmath}]$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{a}_{P,\text{rel}} = -({\omega_2}^2 r)\vec{\jmath}} \qquad \textbf{(0,5)}$$

$$\vec{a}_{P,\text{arr}} = \vec{a}_{A,\text{arr}} + \vec{\alpha}_{\text{arr}} \wedge (P - A) + \vec{\omega}_{\text{arr}} \wedge [\vec{\omega}_{\text{arr}} \wedge (P - A)] = \omega_1 \vec{\imath} \wedge [\omega_1 \vec{\imath} \wedge (-2r\vec{\imath} + 3r\vec{\jmath})]$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{a}_{P,\text{arr}} = -(3{\omega_1}^2 r)\vec{\jmath}} \qquad \textbf{(0,5)}$$

$$\vec{a}_{P,\text{Cor}} = 2\vec{\omega}_{\text{arr}} \wedge \vec{v}_{P,\text{rel}} = \omega_1 \vec{\imath} \wedge (\omega_2 r)\vec{\imath} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{a}_{P,\text{Cor}} = \vec{0}} \qquad \textbf{(0,5)}$$

Finalmente, a aceleração absoluta do ponto P do disco é dada por:

$$\vec{a}_{P,\text{abs}} = -r({\omega_2}^2 + 3{\omega_1}^2)\vec{\jmath}$$

c) O vetor de rotação absoluta do disco é dado por:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_{\text{rel}} + \vec{\omega}_{\text{arr}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\omega} = -\omega_2 \vec{k} + \omega_1 \vec{\imath}} \qquad \textbf{(0,5)}$$

A aceleração rotacional absoluta do disco é dada por:

$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_{\text{rel}} + \vec{\alpha}_{\text{arr}} + \vec{\omega}_{\text{arr}} \wedge \vec{\omega}_{\text{rel}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\alpha} = (\omega_1 \omega_2)\vec{\jmath}} \qquad \textbf{(0,5)}$$

Resolução da Questão 2 **(3,0 pontos)**

a) O vetor rotação do triângulo ABC neste instante é $\vec{\Omega} = \Omega_x\vec{\imath} + \Omega_y\vec{\jmath} + \Omega_z\vec{k}$. Utilizando a fórmula de campo de velocidades para os pontos A e B do corpo rígido:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\Omega} \wedge (A - B) \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda L}{2}\vec{\jmath} = -\frac{\lambda L}{2}\vec{\jmath} + (\Omega_x\vec{\imath} + \Omega_y\vec{\jmath} + \Omega_z\vec{k}) \wedge (L\vec{\imath})$$

$$\Rightarrow \quad \lambda L\vec{\jmath} = -\Omega_y L\vec{k} + \Omega_z L\vec{\jmath} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Omega_z = \lambda} \quad \text{e} \quad \boxed{\Omega_y = 0} \qquad \textbf{(1,0)}$$

Agora utilizando a fórmula de campo de velocidades para os pontos A e C:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\Omega} \wedge (C - A) \quad \Rightarrow \quad -\lambda L\vec{\imath} + \lambda L\vec{k} = \frac{\lambda L}{2}\vec{\jmath} + (\Omega_x\,\vec{\imath} + \Omega_y\vec{\jmath} + \Omega_z\vec{k}) \wedge \left(-\frac{L}{2}\vec{\imath} + L\vec{\jmath}\right)$$

$$\Rightarrow \quad -\lambda L\vec{\imath} - \frac{\lambda L}{2}\vec{\jmath} + \lambda L\vec{k} = \Omega_x L\vec{k} + \Omega_y\frac{L}{2}\vec{k} - \Omega_z\frac{L}{2}\vec{\jmath} - \Omega_z L\vec{\imath}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} -\lambda L = -\Omega_z L & \Rightarrow \quad \Omega_z = \lambda \quad \text{OK} \\ -\dfrac{\lambda L}{2} = -\dfrac{\Omega_z L}{2} & \Rightarrow \quad \Omega_z = \lambda \quad \text{OK} \\ \lambda L = \Omega_x L + \Omega_y\dfrac{L}{2} & \end{cases}$$

Como $\Omega_y = 0$, então da última equação tem-se que $\boxed{\Omega_x = \lambda}$. **(1,0)**
Portanto, $\vec{\Omega} = \Omega_x\vec{\imath} + \Omega_y\vec{\jmath} + \Omega_z\vec{k} = \lambda(\vec{\imath} + \vec{k})$.

b) Velocidade do ponto O:

$$\vec{v}_O = \vec{v}_A + \vec{\Omega} \wedge (O - A) \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_O = \frac{\lambda L}{2}\vec{\jmath} + \lambda(\vec{\imath} + \vec{k}) \wedge \left(-\frac{L}{2}\vec{\imath}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{v}_O = \vec{0}} \qquad \textbf{(0,5)}$$

c) Determinação do eixo helicoidal instantâneo do corpo adotando $\vec{v}_0 = \vec{0}$:

$$(E - O) = \frac{\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_O}{|\vec{\Omega}|^2} + \mu\vec{\Omega} \quad \Rightarrow \quad \boxed{(E - O) = \vec{0} + \mu\lambda(\vec{\imath} + \vec{k}), \quad \mu \text{ escalar}} \qquad \textbf{(0,5)}$$

ou seja, trata-se de uma rotação pura com eixo helicoidal instantâneo que passa pela origem O e tem direção do próprio vetor de rotação $\vec{\Omega} = \lambda(\vec{\imath} + \vec{k})$.
Alternativamente pode-se utilizar para determinar um ponto E do *EHI*, o ponto A com $\vec{v}_A = \frac{\lambda L}{2}\vec{\jmath}$, obtendo-se:

$$(E - A) = \frac{\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_A}{|\vec{\Omega}|^2} + \mu\vec{\Omega} \quad \Rightarrow \quad (E - A) = \frac{\lambda\,(\vec{\imath} + \vec{k}) \wedge \frac{\lambda L}{2}\vec{\jmath}}{2\lambda^2} + \mu\lambda(\vec{\imath} + \vec{k})$$

$$(E - A) = \frac{\frac{\lambda^2 L}{2}(-\vec{\imath} + \vec{k})}{2\lambda^2} + \mu\lambda(\vec{\imath} + \vec{k}) \quad \Rightarrow \quad (E - A) = \frac{L}{4}(-\vec{\imath} + \vec{k}) + \mu\lambda(\vec{\imath} + \vec{k}), \quad \mu \text{ escalar}$$

Utilizando o ponto C com $\vec{v}_C = -\lambda L\vec{\imath} + \lambda L\vec{k}$, obtém-se:

$$(E - C) = \frac{\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_C}{|\vec{\Omega}|^2} + \mu\vec{\Omega} \quad \Rightarrow \quad (E - C) = \frac{\lambda(\vec{\imath} + \vec{k}) \wedge \lambda L(-\vec{\imath} + \vec{k})}{2\lambda^2} + \mu\lambda(\vec{\imath} + \vec{k})$$

$$(E - C) = \frac{\lambda^2 L(-2\vec{\jmath})}{2\lambda^2} + \mu\lambda(\vec{\imath} + \vec{k}) \quad \Rightarrow \quad (E - C) = -L\vec{\jmath} + \mu\lambda(\vec{\imath} + \vec{k}), \quad \mu \text{ escalar}$$

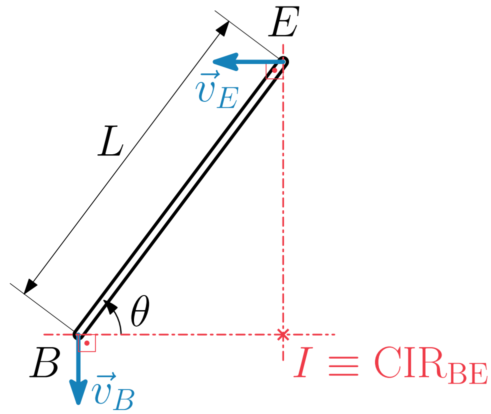
Resolução da Questão 3 **(3,5 pontos)**

a) $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (B - A)$, com $\vec{v}_A = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_B = -\omega\vec{k} \wedge (4a\vec{\imath}) \quad \Rightarrow \boxed{\vec{v}_B = -4\omega a\vec{\jmath}}$ **(0,5)**

$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \wedge (B - A) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (B - A)]$, com $\vec{a}_A = \vec{0}$ e $\dot{\vec{\omega}} = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{a}_B = \omega\vec{k} \wedge [\omega\vec{k} \wedge (4a\vec{\imath})] \Rightarrow \boxed{\vec{a}_B = -4\omega^2 a\vec{\imath}}$ **(0,5)**

b) A partir da construção geométrica abaixo, determina-se o ponto I solidário ao campo cinemático da barra rígida BE que, na configuração analisada, corresponde ao seu centro instantâneo de rotação. **(1,0)**



c) $\vec{v}_B = \vec{v}_I + \vec{\omega}_{\mathrm{BE}} \wedge (B - I) \Rightarrow -4\omega a\vec{\jmath} = \omega_{\mathrm{BE}}\vec{k} \wedge (-L\cos\theta\vec{\imath}) \Rightarrow \omega_{\mathrm{BE}} = \dfrac{4\omega a}{L\cos\theta} \Rightarrow \boxed{\vec{\omega}_{\mathrm{BE}} = \dfrac{4\omega a}{L\cos\theta}\vec{k}}$ **(1,0)**

d) $\vec{v}_E = \vec{v}_I + \vec{\omega}_{\mathrm{BE}} \wedge (E - I) \Rightarrow \vec{v}_E = \dfrac{4\omega a}{L\cos\theta}\vec{k} \wedge (L\sin\theta\vec{\jmath}) \Rightarrow \boxed{\vec{v}_E = -4\omega a\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\vec{\imath}}$ **(0,5)**