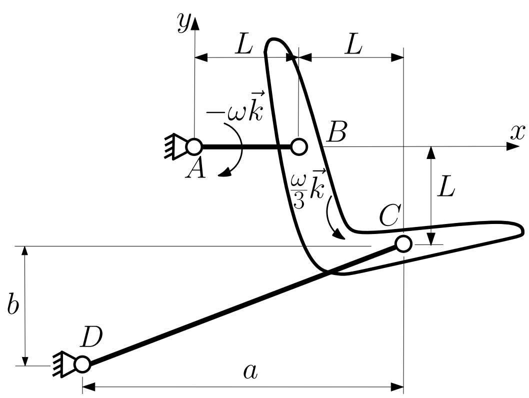
PME 3100 – MECÂNICA I – Prova 2 – 16 de Outubro de 2018

Duração da Prova: 120 minutos (não é permitido usar quaisquer dispositivos eletrônicos)

RESOLUÇÃO

Questão 1 (3,0 pontos). A figura ao lado representa, de maneira simplificada, parte do mecanismo de acionamento da pá de um trator/escavadeira, em que as articulações fixas A e D servem de vínculos para duas hastes rígidas AB e CD, ligadas através de articulações em B e C à pá. No instante mostrado, são conhecidas a velocidade angular da barra AB, $\vec{\omega} = -\omega\vec{k}$, a velocidade angular da pá, $\frac{\omega}{3}\vec{k}$ e as dimensões da barra AB e do segmento BC em função do parâmetro L. Com base nestas informações e utilizando o sistema de coordenadas $Axyz$, determine:
a) a velocidade do ponto B, $\vec{v}_B$;
b) a velocidade do ponto C, $\vec{v}_C$;
c) a relação entre as cotas a e b de modo a garantir a condição de corpo rígido para a barra CD.



a) Da equação fundamental da cinemática do corpo rígido (campo de velocidades) para a barra AB:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (B - A) = \vec{0} - \omega\vec{k} \wedge (L\vec{\imath}) = -\omega L\vec{\jmath} \qquad (1{,}0)$$

b) Lembrando que o vetor rotação instantânea da pá foi dado:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \frac{\omega}{3}\vec{k} \wedge (C - B)$$
$$\vec{v}_C = -\omega L\vec{\jmath} + \frac{\omega}{3}\vec{k} \wedge (L\vec{\imath} - L\vec{\jmath})$$
$$\vec{v}_C = \frac{\omega L}{3}\vec{\imath} - \frac{2\omega L}{3}\vec{\jmath} \qquad (1{,}0)$$

c) A condição de corpo rígido é satisfeita quando as projeções das velocidades de dois pontos quaisquer de um corpo rígido na direção do segmento de reta que os une é idêntica. Portanto, para os pontos C e D, pertencentes à barra CD, tem-se:

$$\vec{v}_C \cdot (C - D) = \vec{v}_D \cdot (C - D)$$
$$\left(\frac{\omega L}{3}\vec{\imath} - \frac{2\omega L}{3}\vec{\jmath}\right) \cdot (a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}) = \vec{0} \cdot (a\vec{\imath} + b\vec{\jmath})$$
$$a\frac{\omega L}{3} - b\frac{2\omega L}{3} = 0$$
$$\therefore \quad a = 2b \qquad (1{,}0)$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

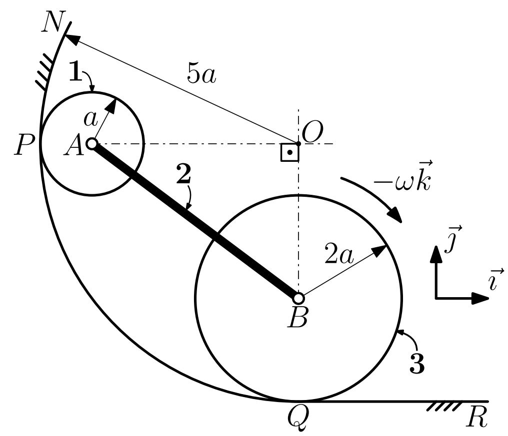
Questão 2 (3,5 pontos). Considere o sistema da figura, em que dois discos rígidos (corpos **1** e **3**), de raios a e $2a$, estão articulados, em seus respectivos centros A e B, a uma barra rígida (corpo **2**). Os discos *rolam sem escorregar* sobre uma pista fixa $NPQR$. Nesta pista, o trecho circular NPQ, de centro O e raio $5a$, tangencia o trecho retilíneo QR, paralelo ao versor $\vec{\imath}$. Sabendo que a velocidade angular do disco de centro B é $\vec{\omega}_3 = -\omega\vec{k}$, com $\omega > 0$ constante, pede-se, *para a configuração indicada na figura*, em que a linha PA está paralela ao versor $\vec{\imath}$ e a linha QB está paralela ao versor $\vec{\jmath}$:

a) Determinar a posição do centro instantâneo de rotação da barra, indicando claramente a construção gráfica utilizada.

b) As velocidades angulares $\vec{\omega}_1$, do disco de centro A, e $\vec{\omega}_2$, da barra.

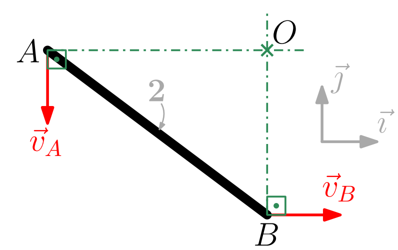
c) As componentes intrínsecas da aceleração $\vec{a}_A$, do ponto A.

d) A aceleração angular $\dot{\vec{\omega}}_2$, da barra.



a) Da condição de rolamento sem escorregamento, no disco de centro B, $\vec{v}_Q = \vec{0}$ e:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_Q + \vec{\omega}_3 \wedge (B - Q) = -\omega\vec{k} \wedge (2a\vec{\jmath}) = 2a\omega\vec{\imath}$$



Para o disco de centro A, denote-se $\vec{\omega}_1 = \omega_1\vec{k}$. Da condição de rolamento sem escorregamento, $\vec{v}_P = \vec{0}$ e:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_P + \vec{\omega}_1 \wedge (A - P) = \omega_1\vec{k} \wedge (a\vec{\imath}) = a\omega_1\vec{\jmath}$$

Conhecidas as direções de $\vec{v}_A$ e $\vec{v}_B$, determina-se que o centro instantâneo de rotação da barra é o ponto O, conforme indicado na figura (1,0).

b) A partir da construção gráfica acima, pode-se afirmar que:

$$|\vec{\omega}_2| = \frac{|\vec{v}_A|}{|A - O|} = \frac{|\vec{v}_B|}{|B - O|} \quad \Leftrightarrow \quad |\vec{\omega}_2| = \frac{|\vec{\omega}_1|}{4} = \frac{2\omega}{3}$$

Assim, considerando os sentidos de $\vec{v}_A$ e $\vec{v}_B$:

$$\vec{\omega}_1 = -\frac{8\omega}{3}\vec{k} \quad \text{e} \quad \vec{\omega}_2 = +\frac{2\omega}{3}\vec{k} \qquad (1{,}0)$$

c) Sabe-se que $\vec{v}_A = -\frac{8}{3}a\omega\vec{\jmath}$, de onde se pode afirmar que:

$$v_A = |\vec{v}_A| = \frac{8}{3}a\omega \quad \text{e} \quad \vec{\tau}_A = \frac{\vec{v}_A}{v_A} = -\vec{\jmath}$$

Ainda, sabendo que o ponto A descreve um arco de circunferência plano, de centro O e raio $\rho_A = 4a$, tem-se:

$$\vec{n}_A = \frac{O - A}{|O - A|} = \vec{\imath} \quad \text{e} \quad a_{An} = \frac{v_A^2}{\rho_A} = \frac{(8a\omega/3)^2}{4a} = \frac{16}{9}a\omega^2 \qquad (0{,}5)$$

Assim:

$$\vec{a}_A = a_{At}\vec{\tau}_A + a_{An}\vec{n}_A = -a_{At}\vec{\jmath} + \frac{16}{9}a\omega^2\vec{\imath}$$

Sabe-se que o ponto B realiza um movimento retilíneo com $\vec{v}_B = 2a\omega\vec{\imath}$ constante, então $\vec{a}_B = \vec{0}$. Portanto, adotando a notação $\dot{\vec{\omega}}_2 = \alpha_2\vec{k}$ e aplicando a equação do campo de acelerações para a barra:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \dot{\vec{\omega}}_2 \wedge (A - B) + \vec{\omega}_2 \wedge [\vec{\omega}_2 \wedge (A - B)]$$
$$\frac{16}{9}a\omega^2\vec{\imath} - a_{At}\vec{\jmath} = \alpha_2\vec{k} \wedge (-4a\vec{\imath} + 3a\vec{\jmath}) + \frac{2\omega}{3}\vec{k} \wedge \left[\frac{2\omega}{3}\vec{k} \wedge (-4a\vec{\imath} + 3a\vec{\jmath})\right]$$
$$\frac{16}{9}a\omega^2\vec{\imath} - a_{At}\vec{\jmath} = \left(\frac{16}{9}a\omega^2 - 3a\alpha_2\right)\vec{\imath} + \left(-\frac{4}{3}a\omega^2 - 4a\alpha_2\right)\vec{\jmath}$$

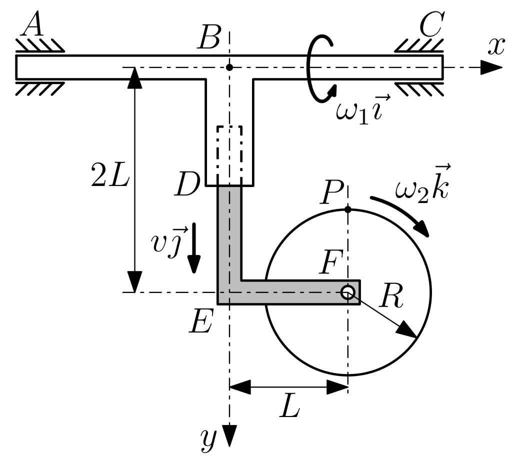
De onde se obtêm $\alpha_2 = 0$ e:

$$a_{At} = \frac{4}{3}a\omega^2 \qquad (0{,}5)$$

d) A partir da solução do sistema de equações do item anterior, $\dot{\vec{\omega}}_2 = \alpha_2\vec{k} = \vec{0}$ (0,5). *Observação:* Na ausência de uma expressão geral para o vetor velocidade angular $\vec{\omega}_2$ *não é possível* obter o valor instantâneo $\dot{\vec{\omega}}_2 = \vec{0}$ associado à referida configuração do sistema a partir do cálculo de uma derivada temporal.

Questão 3 (3,5 pontos). O dispositivo $ABCD$ gira em torno do eixo horizontal Bx com velocidade angular $\vec{\omega}_1 = \omega_1\vec{\imath}$ (ω_1 constante). Na extremidade D desse dispositivo encontra-se acoplada uma peça DEF que desliza com velocidade $\vec{v} = v\vec{\jmath}$ (v constante) em relação a $ABCD$. Adicionalmente, a peça DEF transporta em sua extremidade F um disco de raio R que gira com velocidade angular $\vec{\omega}_2 = \omega_2\vec{k}$ (ω_2 constante) em relação a $ABCD$. Utilizando o sistema de coordenadas $Bxyz$, solidário ao dispositivo $ABCD$, e considerado o instante ilustrado na figura, determine:

a) as velocidades relativa ($\vec{v}_{P,r}$), de arrastamento ($\vec{v}_{P,a}$) e absoluta ($\vec{v}_P$) do ponto P do disco;
b) as acelerações relativa ($\vec{a}_{P,r}$), de arrastamento ($\vec{a}_{P,a}$) e absoluta ($\vec{a}_P$) do ponto P do disco;
c) o vetor velocidade angular absoluta do disco, $\vec{\omega}$;
d) o vetor aceleração angular absoluta do disco, $\dot{\vec{\omega}}$.



a) Considerando a composição de movimentos do sistema, e sabendo que o dispositivo $ABCD$ corresponde ao referencial móvel em questão, tem-se:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{P,r} + \vec{v}_{P,a}$$

onde

$$\vec{v}_{P,r} = \vec{v}_{F,r} + \vec{\omega}_r \wedge (P-F) = v\vec{\jmath} + \omega_2\vec{k} \wedge (-R\vec{\jmath})$$
$$\vec{v}_{P,a} = \vec{v}_{B,a} + \vec{\omega}_a \wedge (P-B) = \omega_1\vec{\imath} \wedge [L\vec{\imath} + (2L-R)\vec{\jmath}]$$

Finalmente, após a realização dos cálculos algébricos envolvidos, a velocidade relativa ($\vec{v}_{P,r}$), de arrastamento ($\vec{v}_{P,a}$) e absoluta ($\vec{v}_P$) do ponto P do disco são dadas por:

$$\vec{v}_{P,r} = v\vec{\jmath} + (\omega_2 R)\vec{\imath} \qquad (1,0)$$
$$\vec{v}_{P,a} = \omega_1(2L-R)\vec{k} \qquad (0,5)$$

$$\vec{v}_P = (\omega_2 R)\vec{\imath} + v\vec{\jmath} + \omega_1(2L-R)\vec{k}$$

b) Considerando novamente a composição de movimentos do sistema, e sabendo que o dispositivo $ABCD$ corresponde ao referencial móvel em questão, tem-se:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{P,r} + \vec{a}_{P,a} + \vec{a}_{P,c}$$

onde

$$\vec{a}_{P,r} = \vec{a}_{F,r} + \vec{\alpha}_r \wedge (P-F) + \vec{\omega}_r \wedge [\vec{\omega}_r \wedge (P-F)] = \omega_2\vec{k} \wedge [\omega_2\vec{k} \wedge (-R\vec{\jmath})]$$
$$\vec{a}_{P,a} = \vec{a}_{B,a} + \vec{\alpha}_a \wedge (P-B) + \vec{\omega}_a \wedge [\vec{\omega}_a \wedge (P-B)] = \omega_1\vec{\imath} \wedge \{\omega_1\vec{\imath} \wedge [L\vec{\imath} + (2L-R)\vec{\jmath}]\}$$
$$\vec{a}_{P,c} = 2(\vec{\omega}_a \wedge \vec{v}_{P,r}) = 2\{\omega_1\vec{\imath} \wedge [v\vec{\jmath} + (\omega_2 R)\vec{\imath}]\}$$

Finalmente, após a realização dos cálculos algébricos envolvidos, a aceleração relativa ($\vec{a}_{P,r}$), de arrastamento ($\vec{a}_{P,a}$), de Coriolis ($\vec{a}_{P,c}$) e absoluta ($\vec{a}_P$) do ponto P do disco são dadas por:

$$\vec{a}_{P,r} = ({\omega_2}^2 R)\vec{\jmath} \qquad (0,3)$$
$$\vec{a}_{P,a} = -{\omega_1}^2(2L-R)\vec{\jmath} \qquad (0,3)$$
$$\vec{a}_{P,c} = (2\omega_1 v)\vec{k}$$

$$(0,4)$$

$$\vec{a}_P = [{\omega_2}^2 R - {\omega_1}^2(2L-R)]\vec{\jmath} + (2\omega_1 v)\vec{k}$$

c) A velocidade angular absoluta do disco é dada por:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_a = \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_1 = \omega_2 \vec{k} + \omega_1 \vec{\imath} \qquad (0{,}5)$$

d) A aceleração angular absoluta do disco é dada por:

$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_r + \vec{\alpha}_a + \vec{\omega}_a \wedge \vec{\omega}_r = \vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}_2 = \omega_1 \vec{\imath} \wedge \omega_2 \vec{k} = -(\omega_1 \omega_2) \vec{\jmath} \qquad (0{,}5)$$